

Plaquette 2 – Calcul algébrique : simplifier, factoriser, résoudre

Fonction exponentielle — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Règles de calcul.

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad (e^a)^n = e^{na}$$

$$e^0 = 1 \quad e^1 = e \approx 2,718 \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

- **Signe** : pour tout réel x , $e^x > 0$. L'exponentielle ne s'annule jamais et ne change jamais de signe.
- **Conséquence pour le signe d'un produit** : dans une expression factorisée $e^x \times A(x)$, seul $A(x)$ décide du signe.
- **Résolution d'équations** : l'exponentielle étant strictement croissante,

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$
- **Résolution d'inéquations**, dans le même sens :

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$
- **Méthode de factorisation** : on met en facteur la **plus petite** puissance de e présente dans l'expression.
- **Changement de variable** : dans une équation où n'apparaissent que e^{2x} et e^x , on pose $X = e^x$ (avec $X > 0$), on résout en X , puis on revient à x .

Correction de l'exercice 1 – Simplifier des produits et des quotients

a) On **additionne** les exposants.

$$— e^3 \times e^{-5} = e^{3-5} = e^{-2}.$$

b) On commence par la puissance, qui **multiplie** les exposants, puis on divise.

$$— (e^2)^3 = e^6.$$

$$— \frac{e^6}{e^4} = e^{6-4} = e^2.$$

$$c) e^x \times e^{2-x} = e^{x+2-x} = e^2.$$

— Le résultat ne dépend plus de x : c'est une **constante**, environ 7,389.

— **Piège** : ne jamais écrire $(e^2)^3 = e^5$. Une puissance de puissance multiplie les exposants, elle ne les additionne pas.

Réponse. a) e^{-2} · b) e^2 · c) e^2 .

Correction de l'exercice 2 – Une expression à réduire

On traite d'abord le numérateur, puis la division.

Numérateur.

$$— e^{3x} \times e^2 = e^{3x+2}.$$

Division. On soustrait l'exposant du dénominateur, **en entier**, donc entre parenthèses.

$$\frac{e^{3x+2}}{e^{x-1}} = e^{(3x+2)-(x-1)}$$

- $(3x+2)-(x-1) = 3x+2-x+1 = 2x+3$.
- L'expression vaut e^{2x+3} .
- **Piège du signe** : oublier les parenthèses donnerait $3x+2-x-1 = 2x+1$, donc un résultat faux. La soustraction porte sur **tout** l'exposant du dénominateur.

Réponse. e^{2x+3} .

Correction de l'exercice 3 - Factoriser par une exponentielle

On met en facteur la **plus petite** puissance de e, ici e^x dans les deux cas.

a) Puisque $e^{2x} = e^x \times e^x$:

$$e^{2x} + 3e^x = e^x(e^x + 3)$$

b) Puisque $e^{3x} = e^x \times e^{2x}$:

$$e^{3x} - e^x = e^x(e^{2x} - 1)$$

- **Contrôle** : on développe pour vérifier. $e^x \times e^{2x} = e^{3x}$ et $e^x \times 1 = e^x$. Correct.
- **À quoi ça sert** : une fois factorisée, l'expression donne son signe immédiatement, puisque $e^x > 0$. C'est l'étape obligatoire avant tout tableau de signes.

Réponse. a) $e^x(e^x + 3)$ · b) $e^x(e^{2x} - 1)$.

Correction de l'exercice 4 - Simplifier un quotient

Méthode 1 — factoriser le numérateur.

- $e^{2x} + e^x = e^x(e^x + 1)$.
- On simplifie par e^x , qui n'est jamais nul :

$$\frac{e^x(e^x + 1)}{e^x} = e^x + 1$$

Méthode 2 — diviser terme à terme.

- $\frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{e^x}{e^x} = e^x + 1$. Même résultat.
- **Contrôle numérique** : pour $x = 0$, l'expression de départ vaut $\frac{1+1}{1} = 2$, et l'expression simplifiée $1 + 1 = 2$. Cohérent.
- **Ce qui rend la simplification légitime** : on divise par e^x , qui est strictement positif pour tout x . Aucune valeur n'est à exclure, contrairement à une simplification par x .

Réponse. $e^x + 1$.

Correction de l'exercice 5 - Une équation simple

L'exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, deux exponentielles sont égales si et seulement si leurs exposants le sont.

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

- $2x = x + 3$.
- $2x - x = 3$, donc $x = 3$.

Vérification.

- $e^{2 \times 3} = e^6$ et $e^{3+3} = e^6$. Les deux membres coïncident.
- La solution est $x = 3$, et c'est la seule.

- **Pourquoi l'unicité ?** Parce que l'exponentielle est strictement croissante : elle ne prend jamais deux fois la même valeur.

Réponse. $x = 3$.

Correction de l'exercice 6 – Une équation du second degré déguisée

On identifie les exposants.

- $x^2 = 3x - 2$, soit $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Résolution par factorisation. On cherche deux nombres de somme 3 et de produit 2 : ce sont 1 et 2.

- $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, ce qu'on vérifie en développant.
- Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est : $x = 1$ ou $x = 2$.

Vérification.

- Pour $x = 1$: e^1 d'un côté, $e^{3-2} = e^1$ de l'autre. Correct.
- Pour $x = 2$: e^4 et $e^{6-2} = e^4$. Correct.
- **À retenir** : une équation exponentielle n'a pas forcément une seule solution. Le nombre de solutions est celui de l'équation obtenue sur les **exposants**.

Réponse. $x = 1$ et $x = 2$.

Correction de l'exercice 7 – Une équation par factorisation

Étape 1 – factoriser. On écrit $e^{x+1} = e^x \times e$ et $e^{2x} = e^x \times e^x$.

$$e^{2x} - e^{x+1} = e^x(e^x - e)$$

Étape 2 – annuler le produit. Un produit est nul si l'un des facteurs est nul.

- $e^x = 0$ est **impossible** : l'exponentielle est strictement positive.
- Il reste $e^x - e = 0$, soit $e^x = e^1$, donc $x = 1$.

Vérification.

- $e^2 - e^{1+1} = e^2 - e^2 = 0$. Correct.
- **Le réflexe à garder** : après factorisation, toujours écarter explicitement le facteur exponentiel en rappelant qu'il ne s'annule pas. C'est une ligne attendue au bac.

Réponse. $x = 1$.

Correction de l'exercice 8 – Un changement de variable

Étape 1 – poser $X = e^x$, avec la contrainte $X > 0$.

- Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation devient :

$$X^2 - (e + e^2)X + e^3 = 0$$

Étape 2 – résoudre en X . On cherche deux nombres dont la somme vaut $e + e^2$ et le produit e^3 .

- Ce sont e et e^2 , puisque $e \times e^2 = e^3$.
- On vérifie la factorisation : $(X - e)(X - e^2) = X^2 - (e + e^2)X + e^3$. Correct.
- Les solutions sont $X = e$ et $X = e^2$, toutes deux strictement positives : elles conviennent.

Étape 3 – revenir à x .

- $e^x = e^1$ donne $x = 1$.

- $e^x = e^2$ donne $x = 2$.
- **Contrôle de la contrainte** : si le changement de variable avait donné une racine **négative**, il aurait fallu l'écarter, car e^x ne peut pas être négatif. C'est l'étape que les correcteurs attendent.

Réponse. $x = 1$ et $x = 2$.

Correction de l'exercice 9 - Une inéquation

Étape 1 — écrire les deux membres comme des exponentielles.

- $1 = e^0$, donc l'inéquation s'écrit $e^{3x-1} \geq e^0$.

Étape 2 — comparer les exposants. L'exponentielle est strictement **croissante** : l'inégalité se conserve **dans le même sens**.

- $3x - 1 \geq 0$.
- $3x \geq 1$, donc $x \geq \frac{1}{3}$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

- **Vérification** : pour $x = 1$, $e^2 \approx 7,39 \geq 1$. Correct. Pour $x = 0$, $e^{-1} \approx 0,37 < 1$: exclu, comme prévu.
- **À retenir** : le sens de l'inégalité ne change **jamais** quand on compare deux exponentielles, parce que la fonction est croissante sur tout $\mathbb{R}$.

Réponse. $x \geq \frac{1}{3}$, soit $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$.

Correction de l'exercice 10 - Une inéquation à deux exponentielles

On compare directement les exposants, dans le même sens.

- $-2x < x + 6$.
- $-2x - x < 6$, soit $-3x < 6$.
- On divise par -3 , qui est **négatif** : l'inégalité change de sens.
- $x > -2$.

Conclusion. L'ensemble des solutions est $] -2; +\infty[$.

- **Vérification** : pour $x = 0$, $e^0 = 1$ et $e^6 \approx 403$. On a bien $1 < 403$. Pour $x = -3$: $e^6 \approx 403$ et $e^3 \approx 20$, donc l'inégalité est fausse. Correct.
- **Deux règles à ne pas mélanger** : le passage aux exposants **conserve** le sens (croissance de l'exponentielle) ; la division par un nombre négatif **inverse** (règle des inégalités). Ici la seconde s'applique, pas la première.

Réponse. $x > -2$.

Correction de l'exercice 11 - Étudier un signe

On résout d'abord l'équation $f(x) = 0$, puis on utilise la croissance.

- $e^x = e^3$ donne $x = 3$: c'est la seule valeur d'annulation.

Signe par croissance. L'exponentielle étant strictement croissante :

- si $x < 3$, alors $e^x < e^3$, donc $f(x) < 0$;
- si $x > 3$, alors $e^x > e^3$, donc $f(x) > 0$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

- **Méthode générale** : pour étudier le signe d'une différence d'exponentielles, on n'a pas besoin de tableau de signes compliqué. On compare les exposants, et la croissance conclut.

Réponse. f est négative sur $] -\infty ; 3[$, nulle en 3, positive sur $]3 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 12 – Signe d'une expression factorisée

L'expression est un **produit** de deux facteurs.

- Premier facteur : e^x , strictement **positif** pour tout réel x .
- Second facteur : $x - 2$, qui s'annule en 2, négatif avant, positif après.

Le signe du produit est donc **entièrement déterminé** par $x - 2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $x - 2$	–	0	+
signe de $g(x)$	–	0	+

- **Le point clé du chapitre** : dans tout produit contenant une exponentielle, celle-ci ne change rien au signe. On l'écarte et on n'étudie que l'autre facteur.
- **Conséquence pratique** : c'est exactement ce qui se passe dans les études de fonction, où $f(x)$ apparaît presque toujours sous la forme $A(x)e^{u(x)}$.

Réponse. g est du signe de $x - 2$: négative sur $] -\infty ; 2[$, nulle en 2, positive ensuite.

Correction de l'exercice 13 – Deux écritures d'une même fonction

On part du membre de gauche et on divise numérateur et dénominateur par e^x , ce qui est légitime puisque $e^x \neq 0$.

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{\frac{e^x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

- On a utilisé $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.
- L'égalité est donc vraie pour tout réel x — le dénominateur $e^x + 1$ ne s'annule jamais, puisqu'il est strictement supérieur à 1.

Contrôle numérique. Pour $x = 0$:

- Membre de gauche : $\frac{1}{1 + 1} = 0,5$.
- Membre de droite : $\frac{1}{1 + 1} = 0,5$. Cohérent.
- **Utilité des deux formes** : la seconde montre immédiatement que la fonction est comprise entre 0 et 1, et qu'elle tend vers 1 quand x devient grand. C'est la fonction logistique, omniprésente en modélisation.

Réponse. En divisant haut et bas par e^x , et en utilisant $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.

Correction de l'exercice 14 – Le point commun de deux courbes

Les deux courbes se coupent aux points dont l'abscisse vérifie $f(x) = g(x)$. Deux exponentielles sont égales si et seulement si leurs exposants le sont, car la fonction exponentielle est strictement croissante :

$$e^{-x} = e^{2x-6} \Leftrightarrow -x = 2x - 6 \Leftrightarrow -3x = -6 \Leftrightarrow x = 2$$

L'ordonnée du point commun vaut $f(2) = e^{-2} \approx 0,135$. **Vérification** : $g(2) = e^{4-6} = e^{-2}$, la même valeur.

Les courbes ont donc un seul point commun, $(2; e^{-2})$. Avant $x = 2$, la courbe de f est au-dessus de celle de g ; après, elle est en dessous.

Réponse. Le point de coordonnées $(2; e^{-2})$.

Correction de l'exercice 15 - Valeurs exactes et encadrement

a) - $e^0 = 1$, par définition.

— $e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

— $(e^2)^{-1} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0,135$.

b) La fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur les réels positifs : on peut élever l'encadrement au carré.

— $2,718^2 = 7,387\,524$ et $2,719^2 = 7,392\,961$.

— Donc $7,387 < e^2 < 7,393$, et au centième : $7,38 < e^2 < 7,40$.

— La valeur exacte est $e^2 \approx 7,389$, bien dans l'encadrement.

— **Précaution** : élever un encadrement au carré n'est licite que si les bornes sont **positives**. Avec des bornes négatives, l'ordre s'inverserait.

Réponse. a) 1 ; $\frac{1}{e} \approx 0,368$; $e^{-2} \approx 0,135$ · b) $7,38 < e^2 < 7,40$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une fonction sous deux formes

a) On divise chaque terme du numérateur par e^x , ce qui est licite car $e^x \neq 0$.

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x} - \frac{1}{e^x} = e^{2x-x} - e^{-x} = e^x - e^{-x}$$

b) On utilise la seconde forme, bien plus commode.

— $f(0) = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$.

— $f(1) = e - \frac{1}{e} \approx 2,718\,282 - 0,367\,879 \approx 2,350$.

c) On remplace x par $-x$ dans la forme obtenue en a).

— $f(-x) = e^{-x} - e^x$.

— C'est exactement l'opposé de $e^x - e^{-x}$, donc $f(-x) = -f(x)$.

— La fonction f est donc **impaire** : sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère. Il suffit de l'étudier sur $[0; +\infty[$.

d) On résout $e^x - e^{-x} = 0$, soit $e^x = e^{-x}$.

— Donc $x = -x$, soit $2x = 0$ et $x = 0$: unique solution.

Signe. On factorise en utilisant $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$:

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$$

— Le dénominateur est strictement positif : f est du signe de $e^{2x} - 1$.

— $e^{2x} - 1 > 0$ équivaut à $e^{2x} > e^0$, soit $2x > 0$, donc $x > 0$.

— **Conclusion** : f est négative sur $] -\infty ; 0[$, nulle en 0, positive sur $] 0 ; +\infty[$ — ce que l'imparité laissait prévoir.

— **Remarque culturelle** : cette fonction, notée $2 \sinh$, décrit la forme d'un câble suspendu et intervient dans les calculs de lignes électriques.

Réponse. a) en divisant par e^x · b) $f(0) = 0$ et $f(1) = e - \frac{1}{e} \approx 2,350$ · c) f est impaire · d) $f(x) = 0$ pour $x = 0$, négative avant, positive après.