

Plaquette 3 – Dérivées, tangentes et variations

Fonction exponentielle – Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées.

$$(e^x)' = e^x \quad (e^{kx})' = k e^{kx} \quad (e^u)' = u' e^u$$

Opérations.

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- **Méthode en trois temps** : dériver, **factoriser par l'exponentielle**, étudier le signe du facteur restant.
- **Le point qui simplifie tout** : $e^{u(x)} > 0$ pour tout x . Dans $f(x) = A(x) e^{u(x)}$, le signe de f est celui de $A(x)$.
- **Tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a :

$$y = f(a)(x - a) + f(a)$$

- **Variations** : $f' > 0$ donne f croissante, $f' < 0$ donne f décroissante. Un changement de signe de f' signale un **extremum**.

- **Croissances comparées** (utiles pour les limites d'un tableau de variations) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

- **Contrôle** : un extremum trouvé doit être cohérent avec quelques valeurs calculées de part et d'autre.

Correction de l'exercice 1 – Dérivées de base

On applique la formule $(e^{kx})' = k e^{kx}$.

a) Ici $k = 3$: $f(x) = 3 e^{3x}$.

b) Ici $k = -0,5$, et le facteur 2 reste devant.

$$- g'(x) = 2 \times (-0,5) e^{-0,5x} = -e^{-0,5x}.$$

c) La dérivée d'une constante est nulle, et le signe moins se conserve.

$$- h'(x) = -4 e^{4x}.$$

— **Contrôle de cohérence** : g' est négative partout, ce qui est cohérent avec une exponentielle décroissante ($k < 0$) ; f' est positive, cohérente avec une croissance.

— **Piège** : écrire $f(x) = e^{3x}$ en oubliant le facteur 3. Le coefficient de x dans l'exposant ressort toujours en facteur.

Réponse. a) $3 e^{3x}$ · b) $-e^{-0,5x}$ · c) $-4 e^{4x}$.

Correction de l'exercice 2 – Un exposant non affine

On applique la formule générale $(e^u)' = u' e^u$.

— Ici $u(x) = x^2 + 1$, donc $u'(x) = 2x$.

$$f(x) = 2x e^{x^2 + 1}$$

Signe et variations.

- $e^{x^2+1} > 0$, donc f est du signe de $2x$.
- f est décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- Minimum en $x = 0$: $f(0) = e^1 = e \approx 2,718$.
- **Piège classique** : écrire $f(x) = e^{2x}$. On ne dérive pas l'exposant « à la place » de l'exponentielle : on **multiplie** l'exponentielle inchangée par la dérivée de son exposant.

Réponse. $f(x) = 2xe^{x^2+1}$.

Correction de l'exercice 3 - Un produit

On dérive un produit avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$.

- $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.
- $f(x) = u'v + uv' = 1 \times e^x + x \times e^x$.

Factorisation.

$$f(x) = (1 + x)e^x$$

- **Signe** : $e^x > 0$, donc f est du signe de $1 + x$, négatif avant -1 et positif après.
- f admet donc un **minimum** en $x = -1$, valant $f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368$.
- **La factorisation n'est pas cosmétique** : sans elle, le signe de $e^x + xe^x$ n'est pas lisible. C'est toujours la première chose à faire après avoir dérivé.

Réponse. $f(x) = (1 + x)e^x$.

Correction de l'exercice 4 - Un produit avec un facteur affine

Produit avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = e^x$.

- $u'(x) = 2$ et $v'(x) = e^x$.
- $f(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x$.

Factorisation.

$$f(x) = (2 + 2x + 1)e^x = (2x + 3)e^x$$

- **Signe** : celui de $2x + 3$, qui s'annule en $x = -1,5$.
- f est décroissante sur $] -\infty ; -1,5]$, croissante ensuite, avec un minimum en $-1,5$.
- $f(-1,5) = (-3 + 1)e^{-1,5} = -2e^{-1,5} \approx -0,446$.
- **À observer** : la dérivée d'un produit « polynôme $\times$ exponentielle » est toujours de la même forme, avec un polynôme de **même degré**. C'est ce qui rend ces études faciles.

Réponse. $f(x) = (2x + 3)e^x$.

Correction de l'exercice 5 - Un produit avec une exponentielle décroissante

Produit avec $u(x) = x^2 - 3$ et $v(x) = e^{-x}$.

- $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -e^{-x}$.
- $f(x) = 2xe^{-x} - (x^2 - 3)e^{-x}$.

Factorisation.

$$f(x) = (2x - x^2 + 3)e^{-x} = -(x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

- On factorise le trinôme : $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$, vérifié par développement.

$$f(x) = -(x - 3)(x + 1)e^{-x}$$

Signe. L'exponentielle est positive ; le signe vient de $-(x - 3)(x + 1)$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
signe de $f(x)$	$-$	0 puis $+$	0 puis $-$	$-$

- f décroît, puis croît sur $[-1 ; 3]$, puis décroît de nouveau.
- Minimum en -1 : $f(-1) = (1 - 3)e^1 = -2e \approx -5,437$. Maximum en 3 : $f(3) = 6e^{-3} \approx 0,299$.
- **Attention au signe de v'** : avec e^{-x} , la dérivée fait apparaître un **moins**. L'oublier inverse tout le tableau.

Réponse. $f(x) = -(x - 3)(x + 1)e^{-x}$.

Correction de l'exercice 6 - Un quotient

Quotient avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$.

- $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$.

$$f(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2}$$

Factorisation du numérateur.

$$f(x) = \frac{(x - 1)e^x}{x^2}$$

Signe sur $]0 ; +\infty[$.

- $e^x > 0$ et $x^2 > 0$: le signe est celui de $x - 1$.
- f est décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$.
- Minimum en $x = 1$: $f(1) = e \approx 2,718$.
- **Ordre des termes** : au numérateur, c'est $u'v - uv'$, pas $uv' - u'v$. Les intervertir change tout le sens de variation.

Réponse. $f(x) = \frac{(x - 1)e^x}{x^2}$.

Correction de l'exercice 7 - Une tangente à l'origine

On applique la formule du cours :

$$y = f(a)(x - a) + f(a) \quad \text{avec ici } a = 0$$

Étape 1 — les deux valeurs.

- $f(0) = e^0 = 1$.
- $f(x) = 2e^{2x}$, donc $f'(0) = 2 \times 1 = 2$.

Étape 2 — l'équation.

- $y = 2(x - 0) + 1$, soit $y = 2x + 1$.

Contrôle.

- La tangente passe bien par le point $(0 ; 1)$, qui appartient à la courbe.
- Son coefficient directeur 2 est positif, cohérent avec une fonction croissante.
- **Interprétation** : au voisinage de 0, $e^{2x} \approx 2x + 1$. Pour $x = 0,05$: la courbe donne 1,105 et la tangente 1,100 — une approximation très correcte, qui se dégrade dès qu'on s'éloigne.

Réponse. $y = 2x + 1$.

Correction de l'exercice 8 - Une tangente en un autre point

Étape 1 — les deux valeurs.

- $f(1) = 1 \times e^1 = e$.
- $f(x) = (1+x)e^x$ (dérivée d'un produit, déjà factorisée), donc $f(1) = 2e$.

Étape 2 — l'équation.

$$y = f(1)(x-1) + f(1) = 2e(x-1) + e$$

- On développe : $y = 2ex - 2e + e = 2ex - e$.
- Valeur approchée : $y \approx 5,437x - 2,718$.

Contrôle.

- Pour $x = 1$: $2e - e = e$, la tangente passe bien par le point de contact.
- **Rédaction** : on peut laisser la réponse sous forme factorisée ou développée, mais il faut garder les valeurs **exactes** en e tant que l'énoncé ne demande pas d'arrondi.

Réponse. $y = 2ex - e$.

Correction de l'exercice 9 - Un maximum

a) Produit avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x}$, donc $u' = 1$ et $v' = -e^{-x}$.

- $f(x) = e^{-x} - xe^{-x}$.

$$f(x) = (1-x)e^{-x}$$

b) $e^{-x} > 0$: le signe de f est celui de $1-x$, positif avant 1, négatif après.

x	0	1	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	0	−
$f(x)$	0	maximum	vers 0

- Maximum en $x = 1$: $f(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.
- Quand x devient grand, xe^{-x} tend vers 0 par croissances comparées : l'exponentielle décroissante l'emporte sur le facteur x .
- **Forme typique en physique** : cette courbe monte puis redescend vers zéro. Elle décrit la réponse d'un système amorti, dont le maximum est atteint à $t = \tau$, ici 1.

Réponse. a) $(1-x)e^{-x}$ · b) maximum $\frac{1}{e} \approx 0,368$ en $x = 1$.

Correction de l'exercice 10 - Un minimum

a) Produit avec $u(x) = x-1$ et $v(x) = e^x$.

- $f(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = (1+x-1)e^x$.

$$f(x) = xe^x$$

b) $e^x > 0$: le signe de f est celui de x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f(x)$	−	0	+
$f(x)$	vers 0	−1	$+\infty$

- Minimum en $x = 0$: $f(0) = (0-1) \times 1 = -1$.

- En $-\infty$, $f(x)$ tend vers 0 (croissances comparées) en restant négative ; la droite $y = 0$ est **asymptote horizontale**.
- **Simplification remarquable** : la dérivée est $x e^x$, bien plus simple que f elle-même. C'est fréquent avec ces produits, et c'est ce qui rend le tableau immédiat.

Réponse. a) $f(x) = x e^x \cdot$ b) minimum -1 en $x = 0$.

Correction de l'exercice 11 - Deux extremums

- a) Produit avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^{-x}$, donc $u' = 2x$ et $v' = -e^{-x}$.
- $f(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x}$.

$$f(x) = x(2 - x) e^{-x}$$

- b) Sur $[0; +\infty[$, l'exponentielle est positive : le signe vient de $x(2 - x)$.

x	0	2	$+\infty$
signe de x	0 puis +	+	+
signe de $2 - x$	+	0	−
signe de $f(x)$	+	0	−

- f croît sur $[0; 2]$, puis décroît.
- Minimum en $x = 0$: $f(0) = 0$.
- Maximum en $x = 2$: $f(2) = 4 e^{-2} \approx 0,541$.
- **Contrôle numérique** : $f(1) = e^{-1} \approx 0,368$ et $f(3) = 9 e^{-3} \approx 0,448$, tous deux inférieurs à $0,541$. Le maximum est confirmé.

Réponse. a) $x(2 - x) e^{-x} \cdot$ b) minimum 0 en 0, maximum $4e^{-2} \approx 0,541$ en 2.

Correction de l'exercice 12 - Une inégalité prouvée par les variations

- a) $f(x) = e^x - 1$.
- $f(x) > 0$ équivaut à $e^x > 1 = e^0$, soit $x > 0$.
 - f est donc décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.
 - Elle admet un **minimum global** en $x = 0$.
- b) La valeur de ce minimum est :
- $f(0) = e^0 - 0 = 1$.
 - Comme f atteint son minimum en 0, on a $f(x) \geq 1$ pour tout réel x .
 - Donc $e^x - x \geq 1 > 0$, ce qui donne $e^x > x$ pour tout réel x .
 - **Méthode à retenir** : pour démontrer une inégalité entre deux expressions, on étudie leur **différence** et on cherche son minimum. C'est le schéma standard au bac.
 - **Conséquence** : la courbe de l'exponentielle est toujours strictement au-dessus de la droite $y = x$, et même à une distance d'au moins 1.

Réponse. a) minimum en 0, valant 1 · b) $e^x - x \geq 1 > 0$ donc $e^x > x$.

Correction de l'exercice 13 - Une courbe en cloche

- a) On applique $(e^u)' = u' e^u$ avec $u(x) = -x^2$, donc $u'(x) = -2x$.

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

- b) L'exponentielle est positive : le signe de f' est celui de $-2x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	0	-
$f(x)$	vers 0	1	vers 0

- Maximum en $x = 0$: $f(0) = e^0 = 1$.
- Quand $|x|$ devient grand, $-x^2$ tend vers $-\infty$ et $f(x)$ tend vers 0 : la droite $y = 0$ est asymptote horizontale des deux côtés.
- La fonction est **paire** ($f(-x) = f(x)$), donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- **Où on la rencontre** : c'est la célèbre « courbe en cloche », celle de la loi normale en probabilités et du profil d'un faisceau laser en optique.

Réponse. a) $-2xe^{-x^2}$ · b) maximum 1 en $x = 0$, courbe en cloche symétrique.

Correction de l'exercice 14 - Lire un tableau de signes

Le facteur exponentiel. $e^x > 0$ pour tout x : il ne change pas le signe et se met de côté.

Les deux facteurs affines.

- $x + 2$ s'annule en -2 : négatif avant, positif après.
- $4 - x$ s'annule en 4 : positif avant, négatif après.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$x + 2$	-	0 puis +	+	+
$4 - x$	+	+	0 puis -	-
$f(x)$	-	0 puis +	0 puis -	-

Variations de f .

- f est décroissante sur $]-\infty ; -2]$, croissante sur $[-2 ; 4]$, puis décroissante sur $[4 ; +\infty[$.
- f admet un minimum local en $x = -2$ et un maximum local en $x = 4$.
- **Attention au facteur $4 - x$** : il est décroissant, son signe part du + et passe au -. Le lire à l'envers inverse tout le tableau — c'est l'erreur la plus fréquente.

Réponse. f décroît, croît sur $[-2 ; 4]$, puis décroît : minimum en -2 , maximum en 4 .

Correction de l'exercice 15 - Vitesse de charge d'un condensateur

a) On développe d'abord : $u(t) = 12 - 12e^{-2t}$.

- La dérivée de la constante 12 est nulle.
- $(e^{-2t})' = -2e^{-2t}$, donc $(-12e^{-2t})' = -12 \times (-2)e^{-2t}$.

$$u'(t) = 24e^{-2t}$$

- $u'(t) > 0$ pour tout t : la tension est **strictement croissante**, comme attendu lors d'une charge.

b) On évalue la dérivée, qui est la vitesse de montée en V/s.

- $u'(0) = 24e^0 = 24$ V/s.
- $u'(1) = 24e^{-2} \approx 24 \times 0,135335 \approx 3,25$ V/s.
- **Lecture physique** : la charge démarre vite puis ralentit — la vitesse a été divisée par plus de 7 en une seconde. C'est le comportement typique d'un régime transitoire, où la tension s'approche de 12 V sans jamais l'atteindre.

Réponse. a) $u'(t) = 24 e^{-2t} > 0$, u croissante · b) 24 V/s puis environ 3,25 V/s.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude complète

a) - $f(0) = (2 - 0) e^0 = 2 \times 1 = 2$.

— $f(2) = (2 - 2) e^2 = 0$.

b) Produit avec $u(x) = 2 - x$ et $v(x) = e^x$, donc $u'(x) = -1$.

— $f(x) = -e^x + (2 - x) e^x = (-1 + 2 - x) e^x$.

$$f(x) = (1 - x) e^x$$

c) $e^x > 0$: le signe de f est celui de $1 - x$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	0	-
$f(x)$	vers 0	e	vers $-\infty$

— Maximum en $x = 1$: $f(1) = (2 - 1) e^1 = e \approx 2,718$.

— En $-\infty$, la courbe se rapproche de l'axe des abscisses : $y = 0$ est **asymptote horizontale**.

d) **Tangente en 0.**

— $f(0) = 2$ et $f'(0) = (1 - 0) e^0 = 1$.

— $y = 1 \times (x - 0) + 2$, soit $y = x + 2$.

Équation $f(x) = 0$.

— $(2 - x) e^x = 0$. L'exponentielle ne s'annulant jamais, il reste $2 - x = 0$, soit $x = 2$.

Signe de f .

— f est du signe de $2 - x$: positive sur $]-\infty ; 2[$, nulle en 2, négative sur $]2 ; +\infty[$.

— **Cohérence de l'ensemble** : la courbe monte jusqu'à e en $x = 1$, coupe l'axe en $x = 2$, puis plonge. Le maximum est bien atteint **avant** le zéro, ce que le tableau confirme.

— **Remarque sur le comportement en $+\infty$** : le facteur $2 - x$ tend vers $-\infty$ et e^x vers $+\infty$; le produit tend vers $-\infty$, et très vite — $f(5) = -3 e^5 \approx -445$.

Réponse. a) 2 et 0 · b) $(1 - x) e^x$ · c) maximum e en $x = 1$ · d) $y = x + 2$; $f(x) = 0$ pour $x = 2$, f du signe de $2 - x$.