

Plaquette 1 – Exponentielle de base e : calculs, dérivées, modèles

Fonction exponentielle — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Propriétés algébriques :

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad (e^a)^n = e^{na} \quad e^0 = 1 \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

— $e \approx 2,718$ et $e^x > 0$ **pour tout** réel x : l'exponentielle ne s'annule jamais et ne change pas de signe.

— **Dérivées** : $(e^x)' = e^x$ et, plus généralement,

$$(e^{kx})' = k e^{kx} \quad (e^u)' = u' e^u$$

— **Variations** : $x \mapsto e^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto e^{-kx}$ (avec $k > 0$) est strictement décroissante.

— **Équations et inéquations** : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$.

— Primitive : une primitive de e^{kx} est $\frac{e^{kx}}{k}$.

— **Régime transitoire** type : $u(t) = U\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ (charge) ou $u(t) = U e^{-\frac{t}{\tau}}$ (décharge), où τ est la **constante de temps** ; à $t = 5\tau$, le régime est établi à 99,3 %.

Correction de l'exercice 1 – Simplifier des expressions

On applique les règles des exposants.

a) $e^{3-5} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \approx 0,135$.

b) $e^{7-4} = e^3 \approx 20,09$.

c) $e^6 \approx 403,43$.

d) $e^{x-x} = e^0 = 1$: les deux expressions sont inverses l'une de l'autre.

Réponse. a) e^{-2} · b) e^3 · c) e^6 · d) 1.

Correction de l'exercice 2 – Dérivées d'exponentielles

a) $f(x) = e^x$: l'exponentielle est sa propre dérivée.

b) Formule $(e^{kx})' = k e^{kx}$: $g'(x) = 3 e^{3x}$.

c) $h'(x) = 5 \times (-2) e^{-2x} = -10 e^{-2x}$.

d) Produit avec $u = x$ et $v = e^x$:

$$k'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1 + x) e^x$$

Réponse. a) e^x · b) $3e^{3x}$ · c) $-10e^{-2x}$ · d) $(1 + x)e^x$.

Correction de l'exercice 3 – Variations

— Dérivée (exercice précédent) : $f'(x) = (1 + x) e^x$.

— Comme $e^x > 0$ toujours, le signe de f' est celui de $1 + x$: négatif pour $x < -1$, positif pour $x > -1$.

Intervalle	$] -\infty ; -1]$	$[-1 ; +\infty [$
Signe de $f(x)$	-	+
Variations de f	décroissante	croissante

- Minimum en $x = -1$: $f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368$.
- **Méthode clé** : dans une étude de signe, on peut toujours « éliminer » le facteur exponentiel, qui est strictement positif.

Réponse. Décroissante puis croissante ; minimum $-\frac{1}{e} \approx -0,368$ en $x = -1$.

Correction de l'exercice 4 - Équations exponentielles

On utilise l'équivalence du cours, valable parce que la fonction exponentielle est strictement croissante : deux exponentielles sont égales si et seulement si leurs exposants le sont.

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

- a) $e^x = e^4$ donne directement $x = 4$.
- b) $2x - 1 = x + 3$, donc $x = 4$. **Contrôle** : e^7 des deux côtés.
- c) Aucune solution : e^x est **strictement positif** pour tout réel x , il ne peut pas valoir -2 .

Réponse. a) $x = 4$ · b) $x = 4$ · c) aucune solution.

Correction de l'exercice 5 - Inéquation exponentielle

La fonction exponentielle est **croissante**, donc l'inégalité entre exponentielles se transmet aux exposants **sans changer de sens** :

$$e^{3x-2} \leq e^{x+4} \Leftrightarrow 3x-2 \leq x+4$$

- $2x \leq 6$, donc $x \leq 3$.
- Ensemble des solutions : $] -\infty ; 3]$.
- Contrôle avec $x = 0$: $e^{-2} \approx 0,135 \leq e^4 \approx 54,6$. Vrai.

Réponse. $S =] -\infty ; 3]$.

Correction de l'exercice 6 - Factoriser avec une exponentielle

On factorise par e^x , en remarquant que $e^{2x} = (e^x)^2 = e^x \times e^x$:

$$e^x(e^x - 3) = 0$$

- Un produit est nul si l'un des facteurs est nul. Or $e^x \neq 0$ toujours : il reste $e^x = 3$.
- Donc $x = \ln 3 \approx 1,099$.
- Contrôle : $e^{2\ln 3} - 3e^{\ln 3} = 9 - 9 = 0$. Correct.

Réponse. $x = \ln 3 \approx 1,099$.

Correction de l'exercice 7 - Tangente à la courbe de l'exponentielle

Formule du cours : $y = f(a)(x - a) + f(a)$, avec ici $f = e$.

- En $a = 0$: $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$, donc $y = 1 \times (x - 0) + 1 = x + 1$.
- En $a = 1$: $f(1) = e$ et $f'(1) = e$, donc $y = e(x - 1) + e = ex$.
- La seconde tangente passe par l'origine : c'est une propriété remarquable de la courbe de l'exponentielle.

Réponse. $y = x + 1$ puis $y = e^x$.

Correction de l'exercice 8 - Charge d'un condensateur

a) $u(0) = 12(1 - e^0) = 12(1 - 1) = 0 \text{ V}$: le condensateur est déchargé au départ.

b) Pour $t = \tau = 0,02 \text{ s}$: $u(\tau) = 12(1 - e^{-1})$.

— $e^{-1} \approx 0,36788$, donc $u(\tau) \approx 12 \times 0,63212 \approx 7,59 \text{ V}$.

— Cela représente 63,2 % de la tension finale : c'est la valeur caractéristique **au bout d'une constante de temps**.

c) Quand t augmente, $e^{-\frac{t}{0,02}}$ tend vers 0, donc $u(t)$ tend vers 12 V sans jamais l'atteindre.

— En pratique, on considère la charge terminée à $t = 5\tau = 0,1 \text{ s}$, où $u \approx 11,92 \text{ V}$, soit 99,3 %.

Réponse. a) 0 V · b) $\approx 7,59 \text{ V}$, soit 63,2 % · c) vers 12 V.

Correction de l'exercice 9 - Décharge d'un condensateur

a) $u(0) = 9e^0 = 9 \text{ V}$.

— $u(0,1) = 9e^{-2} \approx 9 \times 0,13534 \approx 1,22 \text{ V}$.

b) Dérivée : $u'(t) = 9 \times \left(-\frac{1}{0,05}\right)e^{-\frac{t}{0,05}} = -180e^{-\frac{t}{0,05}}$.

— L'exponentielle étant positive, $u'(t) < 0$: la tension est bien **décroissante**.

c) On résout $9e^{-20t} = 1$, soit $e^{-20t} = \frac{1}{9}$.

— Donc $-20t = \ln \frac{1}{9} = -\ln 9$, et $t = \frac{\ln 9}{20} \approx \frac{2,197}{20} \approx 0,110 \text{ s}$.

— Contrôle : $9e^{-20 \times 0,11} \approx 9 \times 0,1108 \approx 1,00 \text{ V}$. Cohérent.

Réponse. a) 9 V et $\approx 1,22 \text{ V}$ · b) $u'(t) = -180e^{-20t} < 0$ · c) $t \approx 0,110 \text{ s}$.

Correction de l'exercice 10 - Primitive d'une exponentielle

Formule du cours : une primitive de e^{kt} est $\frac{e^{kt}}{k}$.

— a) $F(t) = e^t$.

— b) $G(t) = \frac{e^{4t}}{4}$.

— c) $H(t) = 6 \times \frac{e^{-3t}}{-3} = -2e^{-3t}$.

— Contrôle de c) : $H'(t) = -2 \times (-3)e^{-3t} = 6e^{-3t} = h(t)$. Correct.

Réponse. a) e^t · b) $\frac{e^{4t}}{4}$ · c) $-2e^{-3t}$.

Correction de l'exercice 11 - Intégrale d'une exponentielle

— Primitive : $\frac{e^{2t}}{2}$.

$$\int_0^1 e^{2t} dt = \left[\frac{e^{2t}}{2} \right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$$

— Valeur approchée : $e^2 \approx 7,389$, donc l'intégrale vaut environ $\frac{6,389}{2} \approx 3,195$.

- Contrôle de vraisemblance : sur $[0; 1]$, e^{2t} varie de 1 à 7,39 ; une aire d'environ 3,2 est plausible.

Réponse. $\frac{e^2 - 1}{2} \approx 3,195$.

Correction de l'exercice 12 - Croissances comparées

On calcule les deux lignes.

x	1	3	5	10
x^2	1	9	25	100
e^x	3	20	148	22 026

- Pour $x = 1$, l'exponentielle est déjà plus grande ; l'écart devient ensuite **considérable**.
- Propriété du cours (croissances comparées) : l'exponentielle **l'emporte** sur toute puissance de x quand x devient grand.
- Conséquence pratique : un phénomène exponentiel finit toujours par dépasser un phénomène polynomial, même si son départ est plus lent.

Réponse. x^2 : 1, 9, 25, 100 · e^x : 3, 20, 148, 22 026 : l'exponentielle l'emporte.

Correction de l'exercice 13 - Un refroidissement

a) $f(0) = 20 + 60 e^0 = 80$ °C. Au bout de 10 minutes,

$f(10) = 20 + 60 e^{-1} \approx 20 + 60 \times 0,3679 \approx 42,1$ °C.

b) La dérivée de $e^{-0,1t}$ est $-0,1 e^{-0,1t}$ (formule $(e^{kt})' = k e^{kt}$), donc

$$f'(t) = 60 \times (-0,1) e^{-0,1t} = -6 e^{-0,1t}$$

Une exponentielle est strictement positive, donc $f'(t) < 0$: la température est **décroissante**.

c) Quand t devient grand, $e^{-0,1t}$ se rapproche de 0, donc $f(t)$ se rapproche de 20 °C, la température ambiante, sans jamais l'atteindre.

Réponse. a) 80 °C et environ 42,1 °C · b) $f'(t) = -6 e^{-0,1t} < 0$, décroissante · c) vers 20 °C.

Correction de l'exercice 14 - Une inéquation avec le logarithme

On cherche t tel que $A_0 e^{-0,5t} < 0,1 A_0$, soit, en divisant par $A_0 > 0$, $e^{-0,5t} < 0,1$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: on peut l'appliquer aux deux membres sans changer le sens. Comme $\ln(e^a) = a$:

$$-0,5t < \ln 0,1 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 0,1}{-0,5} = 2 \ln 10 \approx 4,61$$

On a divisé par $-0,5$, négatif : le sens de l'inégalité s'est inversé. La grandeur passe sous 10 % de sa valeur initiale au bout de $2 \ln 10 \approx 4,61$ heures. **Contrôle** : $e^{-0,5 \times 5} \approx 0,082 < 0,1$.

Réponse. Au bout de $2 \ln 10 \approx 4,61$ heures.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude d'un régime transitoire

a) $i(0) = 2(1 - 1) = 0$ A.

— L'exposant s'écrit $-\frac{t}{\tau}$ avec $\frac{1}{\tau} = 50$, donc $\tau = \frac{1}{50} = 0,02$ s.

b) Dérivée : $i'(t) = 2 \times (0 - (-50)e^{-50t}) = 100e^{-50t}$.

— Elle est strictement **positive** : le courant croît, de plus en plus lentement.

c) $i(0,02) = 2(1 - e^{-1}) \approx 2 \times 0,632 \approx 1,26$ A (soit 63,2 % de la valeur finale).

— $i(0,1) = 2(1 - e^{-5}) \approx 2 \times 0,9933 \approx 1,99$ A.

— Valeur limite : e^{-50t} tend vers 0, donc $i(t)$ tend vers 2 A.

— À $t = 5\tau = 0,1$ s, le régime est établi à 99,3 % : c'est la règle pratique retenue en électricité.

Réponse. a) $i(0) = 0$, $\tau = 0,02$ s · b) $i'(t) = 100e^{-50t} > 0$, croissante · c) $\approx 1,26$ A ; $\approx 1,99$ A ; limite 2 A.