

Plaquette 4 – Limites, croissances comparées et asymptotes

Fonction exponentielle – Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Limites de référence.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Croissances comparées – l'exponentielle gagne toujours.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

- Plus généralement, pour tout entier n : $\frac{e^x}{x^n}$ tend vers $+\infty$ et $x^n e^{-x}$ tend vers 0 en $+\infty$.
- **Asymptote horizontale** : si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe.
- **Position relative** : pour situer la courbe par rapport à son asymptote, on étudie le **signe** de $f(x) - \ell$.
- **Formes indéterminées** : $\infty - \infty$ et $\frac{\infty}{\infty}$ n'ont pas de réponse immédiate. Deux techniques : **factoriser** par le terme dominant, ou **diviser** haut et bas par e^x .
- **Lecture physique** : la limite d'un modèle transitoire est sa valeur en **régime établi** — tension finale, température ambiante, population d'équilibre.

Correction de l'exercice 1 – Les limites de référence

- a) - $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$: la croissance est très rapide, $e^{10} \approx 22\,026$.
 — $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, en restant **strictement positive** : $e^{-10} \approx 0,000\,045$.
- b) Il suffit de remplacer x par $-x$: les deux limites s'échangent.
 — $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.
 — $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$.
- **À visualiser** : la courbe de e^x s'écrase sur l'axe des abscisses à gauche et explose à droite ; celle de e^{-x} est son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- **Point essentiel** : l'exponentielle tend vers 0 **sans jamais l'atteindre**. C'est ce qui traduit, en physique, qu'un régime transitoire n'est jamais tout à fait terminé.

Réponse. a) $+\infty$ puis 0 · b) 0 puis $+\infty$.

Correction de l'exercice 2 – Une asymptote horizontale

- a) Quand x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers 0, donc $2e^{-x}$ aussi.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 + 0 = 3$$

- b) La droite d'équation $y = 3$ est **asymptote horizontale** à la courbe en $+\infty$.

Position relative. On étudie le signe de $f(x) - 3$.

- $f(x) - 3 = 2e^{-x}$, strictement positif pour tout réel x .

- La courbe est donc **au-dessus** de son asymptote, sur tout $\mathbb{R}$, et s'en rapproche sans jamais la toucher.
- **Contrôle numérique** : $f(5) = 3 + 2e^{-5} \approx 3,013$ et $f(10) \approx 3,0001$. La convergence est rapide.

Réponse. a) 3 · b) asymptote $y = 3$, la courbe reste au-dessus.

Correction de l'exercice 3 - Deux asymptotes

Limite en $+\infty$.

- e^{-x} tend vers 0, donc le dénominateur tend vers $1 + 0 = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{1} = 5$.

Limite en $-\infty$.

- e^{-x} tend vers $+\infty$, donc le dénominateur aussi.
- Un quotient de numérateur constant et de dénominateur tendant vers $+\infty$ tend vers 0.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Asymptotes.

- $y = 5$ en $+\infty$ et $y = 0$ en $-\infty$: deux asymptotes horizontales.
- Contrôle : $f(0) = \frac{5}{2} = 2,5$, exactement à mi-hauteur. La courbe monte de 0 à 5 en forme de « S ».
- **Où on la rencontre** : c'est la **courbe logistique**, modèle d'une croissance qui sature
 - diffusion d'un produit, remplissage d'un marché, propagation d'une épidémie.

Réponse. 0 en $-\infty$ et 5 en $+\infty$: asymptotes $y = 0$ et $y = 5$.

Correction de l'exercice 4 - Une première croissance comparée

Numérateur et dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$: c'est une **forme indéterminée** $\frac{\infty}{\infty}$, on ne peut pas conclure directement.

Le cours donne le résultat :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Illustration.

x	5	10	20
e^x	148,4	22 026	environ $4,9 \times 10^8$
x	5	10	20
quotient	29,7	2 202,6	environ $2,4 \times 10^7$

- Le quotient explose : l'exponentielle croît **beaucoup plus vite** que x.
- **Énoncé général** : à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x. C'est vrai pour x , x^2 , x^{10} — il faut seulement aller plus loin pour le voir.

Réponse. $+\infty$.

Correction de l'exercice 5 - Un produit qui tend vers zéro

Dans les deux cas, on a une forme indéterminée $\infty \times 0$.

Premier cas. Le cours donne directement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

- On peut le voir en écrivant $x e^{-x} = \frac{x}{e^x}$: c'est l'inverse de la limite précédente, qui tendait vers $+\infty$.

Second cas. Le même argument vaut avec x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

Illustration.

x	5	10	20
$x^2 e^{-x}$	0,168	0,004 5	environ 8×10^{-7}

- Le carré ralentit la convergence, mais ne l'empêche pas : l'exponentielle décroissante finit toujours par écraser le facteur polynomial.
- **À retenir** : $x^n e^{-x}$ tend vers 0 en $+\infty$, **quel que soit** l'entier n .

Réponse. Les deux limites valent 0.

Correction de l'exercice 6 – Une limite en moins l'infini

Premier cas. Forme indéterminée $-\infty \times 0$. Le cours donne :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

- La limite est atteinte **par valeurs négatives**, puisque $x < 0$ et $e^x > 0$.

Second cas. On développe pour se ramener à des limites connues.

- $(x - 1) e^x = x e^x - e^x$.
- Le premier terme tend vers 0 (croissance comparée), le second aussi.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) e^x = 0 - 0 = 0$.

Illustration.

x	-5	-10
$(x - 1) e^x$	-0,040	-0,000 5

- **Conséquence graphique** : la courbe de $x \mapsto (x - 1) e^x$ admet la droite $y = 0$ comme asymptote horizontale en $-\infty$, et elle l'approche par en dessous.

Réponse. Les deux limites valent 0.

Correction de l'exercice 7 – Lever une forme indéterminée

Les deux termes tendent vers $+\infty$: forme indéterminée $\infty - \infty$.

Méthode : factoriser par le terme dominant, ici e^x .

$$e^x - x = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} \right)$$

- Par croissances comparées, $\frac{x}{e^x}$ tend vers 0.
- La parenthèse tend donc vers $1 - 0 = 1$.
- Et e^x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = +\infty$$

- **Contrôle numérique** : pour $x = 10$, $e^{10} - 10 \approx 22\,016$. La soustraction de x est négligeable.
- **Le réflexe général** : devant $\infty - \infty$, on factorise par le terme qui croît le plus vite — ici l'exponentielle, toujours.

Réponse. $+\infty$.

Correction de l'exercice 8 - Diviser par l'exponentielle

Numérateur et dénominateur tendent vers $+\infty$: forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Méthode : diviser haut et bas par e^x , qui n'est jamais nul.

$$\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

- On a utilisé $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$.
- Quand x tend vers $+\infty$, e^{-x} tend vers 0.
- Le quotient tend donc vers $\frac{1+0}{1-0} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 1$$

- **Contrôle numérique** : pour $x = 5$, le quotient vaut $\frac{149,4}{147,4} \approx 1,014$. Cohérent.
- **Conséquence** : la droite $y = 1$ est asymptote horizontale, et la courbe reste au-dessus puisque le numérateur dépasse toujours le dénominateur.

Réponse. 1.

Correction de l'exercice 9 - Une somme de trois termes

Forme indéterminée $\infty \times 0$. On développe pour séparer en deux limites connues.

$$(x^2 + 1)e^{-x} = x^2 e^{-x} + e^{-x}$$

- $x^2 e^{-x}$ tend vers 0 (croissances comparées).
- e^{-x} tend vers 0.
- La somme tend donc vers $0 + 0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = 0$$

- **Contrôle numérique** : pour $x = 10$, $101 \times e^{-10} \approx 0,004\,6$. Pour $x = 20$: environ 8×10^{-7} .
- **Méthode à généraliser** : tout produit « polynôme $\times e^{-x}$ » tend vers 0 en $+\infty$. On développe et on applique la croissance comparée terme à terme.

Réponse. 0.

Correction de l'exercice 10 - L'exponentielle contre le cube

a) On compare ligne à ligne.

- $x = 1$: $2,72 > 1$, l'exponentielle est au-dessus.
- $x = 2, 3, 4$: $7,39 < 8$, $20,09 < 27$, $54,60 < 64$ — le cube l'emporte.
- $x = 5$: $148,41 > 125$, l'exponentielle repasse devant.
- Donc $e^x < x^3$ sur un intervalle compris approximativement entre $x = 2$ et $x = 5$, et l'inégalité s'inverse de part et d'autre.

b) Par croissances comparées, l'exponentielle l'emporte à l'infini sur toute puissance :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$$

- Pour $x = 10$, le quotient vaut déjà $\frac{22\,026}{1\,000} \approx 22$.
- **La leçon du tableau** : une croissance exponentielle peut sembler plus lente qu'une croissance polynomiale sur un intervalle donné. Elle finit **toujours** par l'emporter, et de très loin. C'est exactement le raisonnement qui fonde les alertes sur les phénomènes à croissance exponentielle.

Réponse. a) approximativement entre $x = 2$ et $x = 5$ · b) $+\infty$.

Correction de l'exercice 11 - Le régime établi d'un modèle

a) - $v(0) = 30(1 - e^0) = 30(1 - 1) = 0$ m/s : le mobile part de l'arrêt.

- Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-0,4t}$ tend vers 0.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 30(1 - 0) = 30 \text{ m/s}$$

- La droite $v = 30$ est **asymptote horizontale** : c'est la **vitesse limite** du mobile, qu'il approche sans jamais l'atteindre.

b) - $v(5) = 30(1 - e^{-2}) \approx 30 \times 0,8647 \approx 25,9$ m/s.

— $v(10) = 30(1 - e^{-4}) \approx 30 \times 0,9817 \approx 29,5$ m/s.

- **Interprétation** : après 5 s, le mobile atteint 86 % de sa vitesse limite ; après 10 s, 98 %. L'accélération est forte au début puis s'épuise.
- **Lecture pratique** : dans un modèle en $1 - e^{-kt}$, la limite se lit directement sur le coefficient devant la parenthèse. Ici, inutile de calculer quoi que ce soit pour annoncer 30 m/s.

Réponse. a) $v(0) = 0$ et limite 30 m/s · b) 25,9 m/s puis 29,5 m/s.

Correction de l'exercice 12 - Position par rapport à l'asymptote

a) e^{-2x} tend vers 0 en $+\infty$, donc $3e^{-2x}$ aussi.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4 - 0 = 4$.
- La droite $y = 4$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

b) On étudie le signe de la différence.

$$f(x) - 4 = -3e^{-2x}$$

- $e^{-2x} > 0$ pour tout x , donc $-3e^{-2x} < 0$.
- La courbe est **en dessous** de son asymptote, sur tout $\mathbb{R}$.
- **Contrôle numérique** : $f(0) = 4 - 3 = 1$, $f(2) = 4 - 3e^{-4} \approx 3,945$, $f(5) \approx 3,9999$. La courbe monte vers 4 en restant strictement en dessous.
- **Comparaison utile** : avec un signe + devant l'exponentielle, la courbe serait au-dessus. C'est le signe du coefficient, et lui seul, qui décide de la position.

Réponse. a) limite 4, asymptote $y = 4$ · b) la courbe reste en dessous.

Correction de l'exercice 13 - Compléter un tableau de variations

Limite en $-\infty$. On développe pour se ramener aux croissances comparées.

- $f(x) = 3e^x - xe^x$.
- $3e^x$ tend vers 0 et xe^x tend vers 0.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Limite en $+\infty$. Le facteur $3 - x$ tend vers $-\infty$ et e^x vers $+\infty$.

— Ce n'est pas une forme indéterminée : le produit tend vers $-\infty$.

Tableau de variations. $e^x > 0$, donc f est du signe de $2 - x$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	0	−
$f(x)$	vers 0	e^2	vers $-\infty$

— Maximum en $x = 2$: $f(2) = (3 - 2)e^2 = e^2 \approx 7,389$.

— La droite $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$, et la courbe l'approche **par au-dessus**, puisque $f(x) > 0$ tant que $x < 3$.

— **Attention à ne pas confondre** : en $-\infty$ il y a bien une indétermination ($0 \times \infty$ après développement), alors qu'en $+\infty$ il n'y en a aucune. Seule la première demande les croissances comparées.

Réponse. 0 en $-\infty$, $-\infty$ en $+\infty$; maximum $e^2 \approx 7,389$ en $x = 2$.

Correction de l'exercice 14 - Deux modèles à comparer

a) Dans les deux cas, l'exposant tend vers $-\infty$ quand t tend vers $+\infty$.

— $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$.

— Les deux oscillations finissent par s'éteindre : la droite $y = 0$ est asymptote pour les deux.

b) - $f(2) = 8e^{-1} \approx 2,94$ mm et $g(2) = 8e^{-4} \approx 0,15$ mm.

— $f(4) = 8e^{-2} \approx 1,08$ mm et $g(4) = 8e^{-8} \approx 0,003$ mm.

Comparaison.

— Le modèle g amortit **beaucoup** plus vite : après 2 s il a déjà perdu 98 % de son amplitude, contre 63 % pour f .

— **Ce qui décide** : c'est le coefficient k dans e^{-kt} . Plus k est grand, plus la décroissance est rapide. Les deux modèles ont la même limite, mais pas du tout la même **rapidité** — et c'est cette rapidité que l'ingénieur dimensionne.

Réponse. a) 0 pour les deux · b) g amortit bien plus vite (0,15 mm contre 2,94 mm à $t = 2$).

Correction de l'exercice 15 - Une limite à ne pas confondre

a) x tend vers $+\infty$ et e^x aussi.

— Le produit de deux quantités tendant vers $+\infty$ tend vers $+\infty$: **ce n'est pas** une forme indéterminée.

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$.

b) x tend vers $-\infty$ et e^x tend vers 0.

— C'est la forme indéterminée $\infty \times 0$: on ne peut pas conclure sans le cours.

— La croissance comparée tranche : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

Ce que l'exercice montre.

— La même expression donne une limite immédiate d'un côté, une forme indéterminée de l'autre.

— **Réflexe à prendre** : avant toute technique, identifier les limites de **chaque facteur**. Si elles se combinent sans ambiguïté, on conclut ; sinon seulement, on cherche à lever

l'indétermination.

Réponse. a) $+\infty$, pas d'indétermination · b) forme $\infty \times 0$, la limite vaut 0.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : rendement d'un procédé

a) **Modèle A.** On divise haut et bas par t :

$$- R_A(t) = \frac{90}{1 + \frac{4}{t}}, \text{ et } \frac{4}{t} \text{ tend vers } 0.$$

$$- \lim_{t \rightarrow +\infty} R_A(t) = 90.$$

Modèle B. $e^{-0,25t}$ tend vers 0, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_B(t) = 90$.

— Les deux procédés plafonnent au même rendement de 90 % : c'est leur limite technologique commune.

$$b) - R_A(4) = \frac{360}{8} = 45 \, \%.$$

$$- R_B(4) = 90(1 - e^{-1}) \approx 90 \times 0,6321 \approx 56,9 \, \%.$$

$$c) - R_A(20) = \frac{1800}{24} = 75 \, \%.$$

$$- R_B(20) = 90(1 - e^{-5}) \approx 90 \times 0,9933 \approx 89,4 \, \%.$$

d) On tabule les deux modèles.

t (h)	4	12	20	40	76
R_A	45,0	67,5	75,0	81,8	85,5
R_B	56,9	85,5	89,4	90,0	90,0

— Le modèle **B** franchit 85 % vers $t = 12$ h.

— Le modèle A ne l'atteint que vers $t = 76$ h, soit plus de six fois plus tard.

— **Conclusion** : deux modèles peuvent avoir exactement la même limite et des comportements totalement différents. Le modèle exponentiel converge **géométriquement** (chaque tranche de 4 h réduit l'écart au plafond d'un facteur e), alors que le modèle rationnel converge lentement, l'écart au plafond décroissant seulement comme $\frac{1}{t}$.

— **Décision industrielle** : si le rodage est facturé à l'heure, le procédé B est largement préférable, malgré un plafond identique.

Réponse. a) les deux tendent vers 90 % · b) 45 % et $\approx 56,9 \, \%$ · c) 75 % et $\approx 89,4 \, \%$ · d) le modèle B, vers 12 h contre environ 76 h.