

Plaque 5 - Régimes transitoires : charge, refroidissement, décroissance

Fonction exponentielle — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux modèles types.

$$f(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{décroissance}) \quad f(t) = L \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (\text{saturation})$$

- Avec un **décalage** : $f(t) = f_{\infty} + (f_0 - f_{\infty})e^{-\frac{t}{\tau}}$ décrit tout retour vers une valeur d'équilibre f_{∞} depuis une valeur initiale f_0 — c'est la loi de refroidissement.
- **Constante de temps** τ : elle a la dimension d'un temps. Pour un circuit RC, $\tau = RC$.
- **Repères universels** (à connaître par cœur) :

temps écoulé	décroissance : il reste	saturation : on a atteint
τ	36,8 %	63,2 %
2τ	13,5 %	86,5 %
3τ	5,0 %	95,0 %
5τ	0,7 %	99,3 %

- **Régime établi** : en pratique, on le considère atteint à $t = 5\tau$.
- **Dérivée** : $(A e^{-kt})' = -kA e^{-kt}$. Elle donne la **vitesse** d'évolution, maximale au départ.
- **Demi-vie** T : durée au bout de laquelle la quantité est divisée par 2. Après n demi-vies, il reste $\frac{1}{2^n}$ de la quantité initiale.
- **Contrôle systématique** : vérifier la valeur en $t = 0$ et la limite en $+\infty$ avant tout autre calcul. Un modèle qui ne redonne pas la condition initiale est faux.

Correction de l'exercice 1 - Charge d'un condensateur

a) - $u(0) = 12(1 - e^0) = 12(1 - 1) = 0 \text{ V}$: le condensateur est initialement déchargé.

- Quand t tend vers $+\infty$, e^{-2t} tend vers 0, donc $u(t)$ tend vers 12 V.
- La tension 12 V est la valeur du **régime établi**, jamais tout à fait atteinte.

b) On identifie l'exposant à $-\frac{t}{\tau}$.

— $-2t = -\frac{t}{\tau}$ donne $\tau = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}$.

— $u(0,5) = 12(1 - e^{-1}) \approx 12 \times 0,6321 \approx 7,59 \text{ V}$.

— $u(2,5) = 12(1 - e^{-5}) \approx 12 \times 0,9933 \approx 11,92 \text{ V}$.

— **Vérification des repères** : $\frac{7,59}{12} \approx 63,2\%$ et $\frac{11,92}{12} \approx 99,3\%$. Les deux valeurs du tableau sont bien retrouvées.

— **Usage pratique** : ces pourcentages ne dépendent **ni** de la tension finale **ni** de τ . Ils permettent de répondre sans calculatrice.

Réponse. a) $u(0) = 0 \text{ V}$, limite 12 V · b) $\tau = 0,5 \text{ s}$, $u(\tau) \approx 7,59 \text{ V}$ et $u(5\tau) \approx 11,92 \text{ V}$.

Correction de l'exercice 2 - Décharge d'un condensateur

a) L'exposant s'écrit $-\frac{t}{\tau}$ avec $\frac{1}{\tau} = 1,25$.

— $\tau = \frac{1}{1,25} = 0,8 \text{ s}$.

b) - $u(0,8) = 24 e^{-1} \approx 24 \times 0,3679 \approx 8,83 \text{ V}$.

— $u(4) = 24 e^{-5} \approx 24 \times 0,0067 \approx 0,16 \text{ V}$.

— Contrôle : $\frac{8,83}{24} \approx 36,8\%$ et $\frac{0,16}{24} \approx 0,7\%$. Les repères sont respectés, et 4 s correspond bien à 5τ .

c) **Non.** L'exponentielle est strictement positive pour tout t , donc $u(t) > 0$ quel que soit t .

— La tension s'approche de 0 sans jamais l'atteindre : $y = 0$ est asymptote horizontale.

— **Nuance pratique** : après 5τ , la tension résiduelle (0,16 V) est inférieure à la précision d'un voltmètre courant. Le condensateur est considéré comme déchargé, même si le modèle mathématique ne s'annule jamais.

Réponse. a) $\tau = 0,8 \text{ s}$ · b) $\approx 8,83 \text{ V}$ et $\approx 0,16 \text{ V}$ · c) non, elle tend vers 0 sans l'atteindre.

Correction de l'exercice 3 - Refroidissement d'une pièce

a) - $\theta(0) = 20 + 60 \times 1 = 80 \text{ °C}$: température à la sortie du four.

— Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-0,05t}$ tend vers 0.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = 20 + 0 = 20 \text{ °C}$$

— C'est la **température ambiante** de l'atelier : la pièce s'y ramène, sans jamais descendre en dessous.

b) - $\theta(10) = 20 + 60 e^{-0,5} \approx 20 + 36,39 \approx 56,4 \text{ °C}$.

— $\theta(30) = 20 + 60 e^{-1,5} \approx 20 + 13,39 \approx 33,4 \text{ °C}$.

— **Structure du modèle** : $\theta(t) = \theta_{\text{ambiante}} + (\theta_0 - \theta_{\text{ambiante}})e^{-kt}$. C'est l'**écart** à l'ambiante, 60 °C au départ, qui décroît exponentiellement — pas la température elle-même.

— **Erreur classique** : croire que la température tend vers 0 °C . Elle tend vers l'ambiante, et le terme constant 20 n'est pas décoratif.

Réponse. a) 80 °C et 20 °C · b) $\approx 56,4 \text{ °C}$ et $\approx 33,4 \text{ °C}$.

Correction de l'exercice 4 - Vitesse de refroidissement

a) La dérivée de la constante 20 est nulle ; pour l'autre terme, $(e^{kt})' = k e^{kt}$ avec $k = -0,05$.

$$\theta'(t) = 60 \times (-0,05) e^{-0,05t} = -3 e^{-0,05t}$$

b) - $\theta'(0) = -3 \times 1 = -3 \text{ °C/min}$.

— $\theta'(30) = -3 e^{-1,5} \approx -0,67 \text{ °C/min}$.

Commentaire.

— La vitesse est **négative** partout : la pièce refroidit sans interruption, ce qui est cohérent.

— Elle est maximale au départ et divisée par près de 4,5 en une demi-heure.

— **Loi physique sous-jacente** : la vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'écart à l'ambiante. Ici $\theta'(t) = -0,05 \times (\theta(t) - 20)$, ce qu'on vérifie en $t = 0$:

$-0,05 \times 60 = -3$. C'est la loi de Newton.

Réponse. a) $\theta'(t) = -3e^{-0,05t}$ · b) -3 °C/min puis $\approx -0,67$ °C/min.

Correction de l'exercice 5 - Décroissance radioactive

a) - $N(10) = 1\,000e^{-0,5} \approx 1\,000 \times 0,606\,53 \approx 607$ noyaux.

— $N(20) = 1\,000e^{-1} \approx 1\,000 \times 0,367\,88 \approx 368$ noyaux.

b) On calcule les deux membres.

— $\frac{607^2}{1\,000} = \frac{368\,449}{1\,000} \approx 368$. L'égalité est bien vérifiée.

Explication. Elle vient des règles de calcul sur l'exponentielle.

$$N(20) = 1\,000e^{-1} = 1\,000 \times (e^{-0,5})^2 = \frac{(1\,000e^{-0,5})^2}{1\,000}$$

— **Traduction physique** : la proportion de noyaux restants sur 10 ans est **toujours la même**, environ 60,7 %, quel que soit le point de départ. Vingt ans, c'est deux fois cette réduction : $0,607^2 \approx 0,368$.

— **C'est la signature d'une décroissance exponentielle** : elle se caractérise par une réduction en **proportion constante** par unité de temps, jamais par une perte constante en nombre.

Réponse. a) environ 607 puis 368 noyaux · b) parce que $e^{-1} = (e^{-0,5})^2$: la réduction sur 10 ans se répète à l'identique.

Correction de l'exercice 6 - Demi-vie

a) Chaque période de 8 jours divise la masse par 2.

Temps (jours)	0	8	16	24
Masse (mg)	64	32	16	8

— Après n demi-vies, il reste $\frac{64}{2^n}$ mg.

b) On cherche le plus petit n tel que $\frac{64}{2^n} < 1$, c'est-à-dire $2^n > 64$.

— $2^6 = 64$: on obtient exactement 1 mg, ce qui n'est pas strictement inférieur.

— $2^7 = 128$: il reste $\frac{64}{128} = 0,5$ mg, ce qui convient.

— Il faut donc $n = 7$ demi-vies, soit $7 \times 8 = 56$ jours.

— **Contrôle** : après 48 jours (6 demi-vies), il reste exactement 1 mg ; après 56 jours, 0,5 mg.

— **À retenir** : une demi-vie ne dépend **pas** de la quantité initiale. Partir de 64 mg ou de 64 kg donnerait les mêmes durées — seul le nombre de divisions compte.

Réponse. a) 32, 16 et 8 mg · b) après 56 jours (7 demi-vies).

Correction de l'exercice 7 - Élimination d'un médicament

a) - $c(4) = 80e^{-0,6} \approx 80 \times 0,548\,8 \approx 43,90$ mg.

— $c(10) = 80e^{-1,5} \approx 80 \times 0,223\,1 \approx 17,85$ mg.

b) On tabule autour du seuil de 20 mg.

t (h)	8	9	10
$c(t)$ (mg)	24,10	20,74	17,85

- Le seuil est franchi entre 9 h et 10 h : la concentration passe sous 20 mg au cours de la dixième heure.
- Une posologie de 9 **heures** maintient donc le principe actif au-dessus du seuil ; une prise toutes les 10 heures laisserait une fenêtre d'inefficacité.
- **Précision utile** : le modèle est continu, mais la posologie se fixe en heures rondes. On arrondit toujours **vers le bas**, du côté de la sécurité.

Réponse. a) $\approx 43,90$ mg et $\approx 17,85$ mg · b) le seuil est franchi entre 9 h et 10 h : reprendre au bout de 9 h.

Correction de l'exercice 8 – Une population qui sature

- a) - $P(0) = 800 - 500 \times 1 = 300$ milliers d'abonnés au lancement.
- Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-0,2t}$ tend vers 0 : $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 800$ milliers.
 - Le service plafonne donc à 800 000 abonnés : c'est son marché potentiel.
- b) - $P(5) = 800 - 500 e^{-1} \approx 800 - 183,94 \approx 616,06$ milliers.
- $P(20) = 800 - 500 e^{-4} \approx 800 - 9,16 \approx 790,84$ milliers.
- c) $\frac{790,84}{800} \approx 0,9886$, soit environ 98,9 % du potentiel.
- **Lecture commerciale** : la croissance est très rapide au début — 316 milliers d'abonnés gagnés en 5 mois — puis s'épuise : seulement 175 milliers sur les 15 mois suivants.
 - **Décision** : un investissement marketing supplémentaire après 20 mois ne peut plus rapporter que 9 milliers d'abonnés. Le modèle dit quand arrêter de dépenser.

Réponse. a) 300 milliers, limite 800 milliers · b) $\approx 616,06$ et $\approx 790,84$ milliers · c) environ 98,9 %.

Correction de l'exercice 9 – Comparer deux constantes de temps

- a) Dans les deux cas, l'exponentielle tend vers 0 : la tension finale est de 9 V pour les deux circuits.
- b) On utilise le repère du cours : 95 % est atteint à $t = 3\tau$.
- Circuit 1 : $\tau_1 = 2$ s, donc $3\tau_1 = 6$ s.
 - Circuit 2 : $\tau_2 = 5$ s, donc $3\tau_2 = 15$ s.
 - Vérification pour le circuit 1 : $u_1(6) = 9(1 - e^{-3}) \approx 9 \times 0,9502 \approx 8,55$ V, soit bien 95 % de 9 V.
- c) Le circuit **1** est le plus rapide.
- Rapport des constantes de temps : $\frac{5}{2} = 2,5$. Le circuit 1 est donc 2,5 fois plus rapide, à **tous** les stades de la charge.
 - **Ce qui est remarquable** : le facteur 2,5 vaut aussi bien pour atteindre 63 % que 95 % ou 99,3 %. La constante de temps fixe l'échelle de temps du phénomène tout entier.
 - **En pratique** : pour un circuit RC, $\tau = RC$. Diviser τ par 2,5 demande de diviser la résistance ou la capacité dans le même rapport.

Réponse. a) 9 V pour les deux · b) 6 s et 15 s · c) le circuit 1, 2,5 fois plus rapide.

Correction de l'exercice 10 - Retrouver un modèle

Détermination de A. C'est la valeur limite du modèle.

- Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-0,4t}$ tend vers 0, donc $f(t)$ tend vers A.
- L'énoncé donne cette limite : $A = 20$.

Détermination de B. On utilise la valeur initiale.

- $f(0) = A + B e^0 = A + B = 50$.
- Donc $B = 50 - 20 = 30$.

Le modèle.

$$f(t) = 20 + 30 e^{-0,4t}$$

Vérification sur les relevés.

- $f(2) = 20 + 30 e^{-0,8} \approx 20 + 13,48 \approx 33,5$ — le relevé donne 35,5.
- $f(4) = 20 + 30 e^{-1,6} \approx 20 + 6,06 \approx 26,1$ — relevé 27,4.
- $f(6) = 20 + 30 e^{-2,4} \approx 20 + 2,72 \approx 22,7$ — relevé 22,9.
- Les écarts sont faibles (moins de 2 unités) : le modèle décrit correctement les mesures, avec la dispersion habituelle d'un capteur.
- **Méthode à retenir** : A se lit sur la **limite**, B sur la **valeur initiale** moins la limite. Deux informations suffisent à caler tout le modèle.

Réponse. $A = 20$ et $B = 30$, soit $f(t) = 20 + 30 e^{-0,4t}$.

Correction de l'exercice 11 - Amortissement d'une vibration

- a) - $a(1) = 12 e^{-0,8} \approx 12 \times 0,4493 \approx 5,39$ mm.
- $a(2) = 12 e^{-1,6} \approx 12 \times 0,2019 \approx 2,42$ mm.
 - $a(5) = 12 e^{-4} \approx 12 \times 0,0183 \approx 0,22$ mm.
- b) On calcule l'amplitude à $t = 4$ s.
- $a(4) = 12 e^{-3,2} \approx 12 \times 0,0408 \approx 0,49$ mm.
 - $0,49 < 0,5$: le seuil est atteint **juste avant** 4 secondes.
 - Contrôle à $t = 3,9$ s : $12 e^{-3,12} \approx 0,53$ mm, encore au-dessus. Le franchissement se produit donc entre 3,9 et 4 s.
 - **Consigne de sécurité** : avec une marge aussi mince, on n'annoncera pas « 4 secondes » mais « 5 secondes », ce qui garantit 0,22 mm. En sécurité, on arrondit toujours du côté défavorable.

Réponse. a) $\approx 5,39$; 2,42 ; 0,22 mm · b) oui, tout juste : $a(4) \approx 0,49$ mm.

Correction de l'exercice 12 - Deux modèles, même valeur initiale

- a) - $h_1(0) = 40 \times 1 = 40\%$.
- $h_2(0) = 5 + 35 \times 1 = 40\%$.
 - Les deux procédés partent bien de 40 % d'humidité.
- b) - h_1 tend vers 0 % : le procédé 1 sèche complètement, à terme.
- h_2 tend vers 5 % : le procédé 2 laisse une humidité résiduelle **irréductible** de 5 %.
- c) L'objectif est 8 %, atteignable par les deux puisque $8 > 5$. On compare les durées.

t (h)	4	5	6
$h_1(t)$	12,05	8,93	6,61
$h_2(t)$	9,74	7,87	6,74

- Le procédé 2 franchit 8 % entre 4 et 5 h ; le procédé 1 entre 5 et 6 h.
- **Choix** : pour un objectif de 8 %, le procédé **2** est plus rapide, malgré son plancher de 5 %.
- **Mais** : si l'objectif était de 3 %, le procédé 2 serait **impossible** — sa limite est 5 %. Le procédé 1, plus lent, l'atteindrait en une dizaine d'heures.
- **Conclusion** : une limite et une vitesse sont deux critères indépendants. Le meilleur procédé dépend entièrement de l'objectif fixé.

Réponse. a) 40 % dans les deux cas · b) 0 % et 5 % · c) le procédé 2, plus rapide jusqu'à 8 % — mais incapable de descendre sous 5 %.

Correction de l'exercice 13 - Lecture d'un tableau de mesures

a) On divise chaque valeur par la précédente.

rapport	$\frac{9,10}{15,00}$	$\frac{5,52}{9,10}$	$\frac{3,35}{5,52}$	$\frac{2,03}{3,35}$
valeur	0,607	0,607	0,607	0,606

- Le rapport est **constant**, environ 0,607, sur chaque intervalle de 10 ms.
- b) **Oui**, c'est la signature d'un modèle exponentiel : une décroissance exponentielle multiplie la valeur par un même facteur à chaque pas de temps égal.

Estimation de τ .

- Le facteur 0,607 correspond à $e^{-0,5}$, puisque $e^{-0,5} \approx 0,6065$.
- Sur 10 ms, l'exposant varie donc de $-0,5$: $\frac{10}{\tau} = 0,5$, d'où $\tau = 20$ ms.
- Le modèle est $u(t) = 15 e^{-\frac{t}{20}}$, avec t en millisecondes.
- Contrôle : $u(20) = 15 e^{-1} \approx 5,52$ V, exactement la mesure relevée à 20 ms.
- **Méthode générale** : devant un tableau de mesures, calculer les rapports successifs. Constants, ils signent une exponentielle ; ce sont les **différences** qui seraient constantes pour un modèle affine.

Réponse. a) rapport constant $\approx 0,607$ · b) oui, modèle exponentiel de constante de temps $\tau = 20$ ms.

Correction de l'exercice 14 - Un modèle qui ne colle pas

Premier défaut : la valeur initiale.

- $u(0) = 12 e^0 = 12$ V.
- Or un condensateur en charge part de 0 V. Le modèle donne la tension maximale dès l'instant initial : c'est absurde.

Second défaut : la limite.

- Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-0,5t}$ tend vers 0, donc $u(t)$ tend vers 0 V, et non vers 12 V.
- Le modèle proposé décrit une **décharge**, exactement l'inverse de ce qu'on veut.

Correction. Le modèle de charge est de la forme saturation.

$$u(t) = 12(1 - e^{-0,5t})$$

- Vérification de la condition initiale : $u(0) = 12(1 - 1) = 0$ V. Correct.
- Vérification de la limite : $u(t)$ tend vers $12(1 - 0) = 12$ V. Correct.
- **Le contrôle en deux points** — valeur en 0 et limite en $+\infty$ — suffit à valider ou rejeter n'importe quel modèle transitoire. C'est le premier réflexe à avoir, avant tout calcul.

Réponse. Le modèle proposé part de 12 V et tend vers 0 : c'est une décharge. La charge s'écrit $u(t) = 12(1 - e^{-0,5t})$.

Correction de l'exercice 15 - Énergie dissipée pendant une décharge

- a) On dérive P avec $(e^{kt})' = k e^{kt}$, ici $k = -4$.
- $P'(t) = -12,5 \times (-4) e^{-4t} = 50 e^{-4t} = p(t)$. Correct.
- b) L'énergie est l'intégrale de la puissance.

$$E = \int_0^1 50 e^{-4t} dt = [-12,5 e^{-4t}]_0^1 = -12,5 e^{-4} + 12,5$$

- $e^{-4} \approx 0,018316$, donc $E \approx 12,5 - 0,229 \approx 12,27$ J.
- c) Sur $[0; T]$, l'énergie vaut $12,5 - 12,5 e^{-4T}$.
- Quand T devient grand, e^{-4T} tend vers 0.
 - L'énergie totale tend donc vers 12,5 J.
 - **Lecture physique** : c'est l'énergie initialement stockée dans le condensateur, entièrement dissipée en chaleur. Après 1 s seulement, 98 % de cette énergie est déjà partie.
 - **Ce que le calcul apporte** : une puissance qui décroît indéfiniment peut malgré tout dissiper une énergie **finie**. C'est parce que l'aire sous une exponentielle décroissante converge.

Réponse. b) $E \approx 12,27$ J · c) l'énergie totale tend vers 12,5 J.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dimensionner un circuit RC

- a) Le repère du cours donne 99,3 % à $t = 5\tau$; c'est donc au plus tard à 5τ que 99 % est dépassé.
- Il faut $5\tau \leq 2$ ms, soit $\tau \leq 0,4$ ms, c'est-à-dire $\tau \leq 4 \times 10^{-4}$ s.
- b) On utilise $\tau = RC$ avec $C = 100$ nF = 10^{-7} F.
- $$R = \frac{\tau}{C} \leq \frac{4 \times 10^{-4}}{10^{-7}} = 4 \times 10^3$$
- La résistance doit valoir au plus 4 kΩ.
- c) - $\tau = 3 \times 10^3 \times 10^{-7} = 3 \times 10^{-4}$ s, soit 0,3 ms.
- À $t = 1$ ms, l'exposant vaut $-\frac{1}{0,3} \approx -3,333$.
 - $u(1 \text{ ms}) = 5(1 - e^{-3,333}) \approx 5 \times 0,9643 \approx 4,82$ V.
- d) On compare 5τ à la contrainte.
- $5\tau = 5 \times 0,3 = 1,5$ ms ≤ 2 ms : le cahier des charges est **respecté**.
 - Marge : $2 - 1,5 = 0,5$ ms, soit 25 % de marge sur le temps imposé.
 - **Vérification directe** : $u(1,5 \text{ ms}) = 5(1 - e^{-5}) \approx 4,97$ V, soit 99,3 % de 5 V. Conforme.
 - **Choix d'ingénieur** : la résistance de 3 kΩ laisse de la marge sans être excessivement faible — une résistance trop petite ferait appeler un courant de charge élevé (

$\frac{5}{3\,000} \approx 1,7$ mA au démarrage), ce qui contraint l'alimentation. On dimensionne donc au plus près de la limite acceptable, pas très en dessous.

Réponse. a) $\tau \leq 0,4$ ms · b) $R \leq 4$ k Ω · c) $\tau = 0,3$ ms et $u(1$ ms) $\approx 4,82$ V · d) oui, $5\tau = 1,5$ ms, soit 25 % de marge.