

Plaquette 4 – Limites, croissances comparées et asymptotes

Fonction exponentielle – Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Une seule idée gouverne tout le chapitre : **l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x** . Devant une forme indéterminée du type $\infty - \infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on ne conclut jamais directement : on **factorise par l'exponentielle** ou on invoque les croissances comparées. Les limites obtenues donnent ensuite les **asymptotes**, qui décrivent le comportement à long terme des modèles physiques.

Exercice 1 – Les limites de référence

Donner, sans calcul, les limites suivantes.

- a) e^x quand x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.
- b) e^{-x} quand x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.

Exercice 2 – Une asymptote horizontale

Soit $f(x) = 3 + 2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- b) En déduire une asymptote, et préciser la position de la courbe par rapport à elle.

Exercice 3 – Deux asymptotes

Soit $f(x) = \frac{5}{1 + e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis les asymptotes.

Exercice 4 – Une première croissance comparée

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$, et illustrer par un tableau de valeurs.

Exercice 5 – Un produit qui tend vers zéro

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$.

Exercice 6 – Une limite en moins l'infini

Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) e^x$.

Exercice 7 – Lever une forme indéterminée

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$.

Exercice 8 – Diviser par l'exponentielle

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

Exercice 9 – Une somme de trois termes

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{-x}$.

Exercice 10 – L'exponentielle contre le cube

On compare e^x et x^3 pour $x > 0$.

x	1	2	3	4	5	10
e^x	2,72	7,39	20,09	54,60	148,41	22 026
x^3	1	8	27	64	125	1 000

a) Sur quel intervalle approximatif a-t-on $e^x < x^3$?

b) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$?

Exercice 11 – Le régime établi d'un modèle

La vitesse d'un mobile est $v(t) = 30(1 - e^{-0,4t})$ (en m/s, t en secondes).

a) Calculer $v(0)$ et la limite de v en $+\infty$.

b) Calculer $v(5)$ et $v(10)$, arrondis au dixième, puis interpréter.

Exercice 12 – Position par rapport à l'asymptote

Soit $f(x) = 4 - 3e^{-2x}$.

a) Déterminer la limite en $+\infty$ et l'asymptote correspondante.

b) Étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 13 – Compléter un tableau de variations

Soit $f(x) = (3 - x)e^x$ sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée est $f'(x) = (2 - x)e^x$.

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations.

Exercice 14 – Deux modèles à comparer

Deux amortisseurs répondent selon $f(t) = 8e^{-0,5t}$ et $g(t) = 8e^{-2t}$ (amplitudes en mm, t en secondes).

a) Quelle est la limite commune des deux modèles ?

b) Calculer $f(2)$ et $g(2)$, puis $f(4)$ et $g(4)$, arrondis au centième. Lequel amortit le plus vite ?

Exercice 15 – Une limite à ne pas confondre

Déterminer les deux limites suivantes, en justifiant laquelle est une forme indéterminée.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

Exercice 16 – Synthèse : rendement d'un procédé

Le rendement d'un procédé est modélisé par $R(t) = \frac{90t}{t+4}$ pour la version A, et $R_B(t) = 90(1 - e^{-0,25t})$ pour la version B (rendement en %, t en heures de rodage).

- a) Déterminer les limites des deux modèles en $+\infty$ et interpréter.
- b) Calculer $R_A(4)$ et $R_B(4)$.
- c) Calculer $R_A(20)$ et $R_B(20)$, arrondis au dixième.
- d) Quel modèle atteint le plus vite un rendement de 85 % ? On pourra s'aider d'un tableau.