

MATHÉMATIQUES

Fonction exponentielle

Terminale STI2D

Nombre e • Fonction exponentielle • $(e^x)' = e^x$ • $(e^{kx})' = ke^{kx}$
Limites • Croissances comparées • Charge d'un condensateur

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe terminale STI2D** (programme de 2019), partie mathématiques, « Fonction exponentielle ». Il prolonge les fonctions $x \mapsto a^x$ de l'enseignement commun et couvre :

- le nombre e et la fonction $x \mapsto e^x$, égale à sa dérivée ;
- dérivée de $x \mapsto e^{kx}$; propriétés algébriques ;
- limites en $-\infty$ et $+\infty$, courbe ; croissances comparées avec les puissances de x ;
- études de fonctions : sommes, produits, quotients d'exponentielles et de polynômes.

Objectif : connaître la fonction exponentielle de base e , la dériver, connaître ses limites et les croissances comparées, et étudier des fonctions qui la contiennent.

Document pédagogique – mathlvl.fr

Table des matières

1	Le nombre e	3
2	Limites et courbe	3
3	Études de fonctions	4
4	Erreurs classiques	4
5	Fiche de synthèse	5
6	Exercices d'application	5
7	Corrigés des exercices	5

1. Le nombre e

Fonction exponentielle

Parmi les fonctions $x \mapsto a^x$ ($a > 0$), il en existe une seule dont la tangente en 0 a pour coefficient directeur 1. Sa base est le nombre $e \approx 2,718$. La fonction $x \mapsto e^x$, notée aussi exp, est la fonction exponentielle.

Dérivée et signe

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée :

$$(e^x)' = e^x \quad e^0 = 1, \quad e^x > 0 \text{ pour tout réel } x.$$

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Règles de calcul

$e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^n = e^{na}$. De plus $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$.

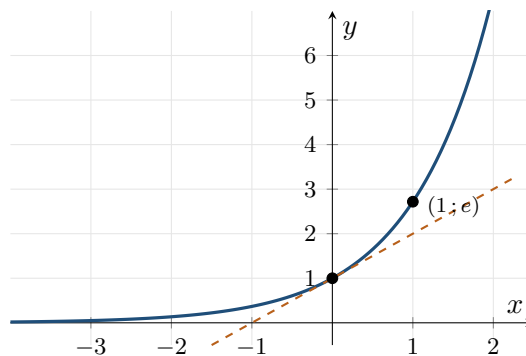
Dérivée de e^{kx}

Pour tout réel k : $(e^{kx})' = k e^{kx}$. Ainsi $x \mapsto e^{kx}$ est croissante si $k > 0$, décroissante si $k < 0$.

2. Limites et courbe

Limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$: l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $-\infty$.



Courbe de $x \mapsto e^x$ et sa tangente $y = x + 1$ en 0.

Croissances comparées

Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

En $+\infty$, l'exponentielle « l'emporte » sur toute puissance de x .

3. Études de fonctions**Un produit**

$f(x) = (x-1)e^x$: $f'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = xe^x$, du signe de x car $e^x > 0$. f décroît sur $] -\infty ; 0]$, croît sur $[0 ; +\infty[$; minimum $f(0) = -1$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

En $-\infty$: $f(x) = xe^x - e^x$ tend vers 0 (croissances comparées : $xe^x \rightarrow 0$).

Charge d'un condensateur

La tension aux bornes d'un condensateur qui se charge est $u(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$, avec $E = 12$ V et $\tau = 0,5$ s. $u'(t) = \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau} > 0$: la tension croît ; $e^{-t/\tau} \rightarrow 0$, donc $u(t) \rightarrow 12$ V. À $t = \tau$: $u(\tau) = 12(1 - e^{-1}) \approx 7,6$ V, soit 63 % de la charge finale.

4. Erreurs classiques**À éviter**

- Oublier le facteur k : $(e^{3x})' = 3e^{3x}$.
- Oublier que $e^x > 0$: le signe de $(x-1)e^x$ est celui de $x-1$.
- Écrire $e^{a+b} = e^a + e^b$.
- Conclure trop vite face à une forme « $\infty \times 0$ » : utiliser les croissances comparées.

5. Fiche de synthèse

Définition	$e \approx 2,718$; $(e^x)' = e^x$; $e^0 = 1$; $e^x > 0$
Calcul	$e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $(e^a)^n = e^{na}$
Dérivée	$(e^{kx})' = k e^{kx}$
Limites	$+\infty$ en $+\infty$; 0 en $-\infty$
Croissances comparées	$\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$; $x^n e^{-x} \rightarrow 0$

6. Exercices d'application

Exercice 1 – Simplifier

Simplifier $A = \frac{e^3 \times e^{-1}}{e^2}$ et $B = (e^{0,5})^4$.

Exercice 2 – Dériver

Dériver $f(x) = 3e^{2x} - x$ et $g(x) = x^2 e^{-x}$.

Exercice 3 – Étude

Étudier les variations de $h(x) = x e^{-x}$ sur $[0; +\infty[$ et donner sa limite en $+\infty$.

Exercice 4 – Décharge

Lors d'une décharge, $u(t) = 10e^{-2t}$. Calculer $u(0)$, $u(1)$ et la limite de u en $+\infty$.

7. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $A = e^{3-1-2} = e^0 = 1$; $B = e^2$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $f'(x) = 6e^{2x} - 1$; $g'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $h'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x)e^{-x}$, du signe de $1 - x$: h croît sur $[0; 1]$, décroît sur $[1; +\infty[$; maximum $h(1) = e^{-1} \approx 0,37$. Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $u(0) = 10 \text{ V}$; $u(1) = 10e^{-2} \approx 1,35 \text{ V}$; $u(t) \rightarrow 0$ en $+\infty$.