

Plaquette 4 - Dériver et optimiser un quotient

Fonction inverse — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées à connaître.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

La forme qui revient sans cesse.

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \implies f(x) = a - \frac{b}{x^2} \implies x_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

— Le minimum vaut alors $f(x_0) = 2\sqrt{ab}$.

— À l'optimum, les **deux termes sont égaux** : $ax_0 = \frac{b}{x_0}$.

Coût unitaire. Si le coût total vaut $C(x)$, le coût unitaire vaut

$$c(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Pour $C(x) = \alpha x^2 + \beta x + F$, on obtient $c(x) = \alpha x + \beta + \frac{F}{x}$, dont l'optimum est $x_0 = \sqrt{\frac{F}{\alpha}}$.

La méthode d'optimisation.

1. Exprimer la grandeur à optimiser en fonction d'une seule variable, et préciser l'intervalle. 2. Dériver et réduire au même dénominateur. 3. Étudier le **signe du numérateur**, le dénominateur étant un carré donc positif. 4. Conclure par un tableau de variations.

△ Une solution négative de $x^2 = \frac{b}{a}$ est à **rejeter** quand la variable représente une quantité physique.

Correction de l'exercice 1 - Deux dérivées simples

On utilise la dérivée de $x \mapsto \frac{k}{x}$, qui vaut $-\frac{k}{x^2}$, et on dérive terme à terme.

— $f(x) = -\frac{8}{x^2}$: elle est strictement négative, donc f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

— Pour g , la dérivée de $\frac{5}{x}$ est $-\frac{5}{x^2}$ et celle de $2x$ est 2 :

$$g'(x) = 2 - \frac{5}{x^2}$$

Son signe change : elle s'annule lorsque $x^2 = 2,5$, soit $x \approx 1,58$ sur $]0; +\infty[$. Elle est négative avant et positive après, donc g admet un minimum en $x \approx 1,58$.

Réponse. $f(x) = -\frac{8}{x^2}$ et $g'(x) = 2 - \frac{5}{x^2}$.

Correction de l'exercice 2 - Un quotient à dériver

Première méthode : simplifier. On sépare la fraction en deux :

$$f(x) = \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

car la dérivée d'une constante est nulle.

Seconde méthode : formule du quotient. Avec $u = 3x + 1$ et $v = x$, on a $u' = 3$ et $v' = 1$, d'où $f(x) = \frac{3 \times x - (3x + 1) \times 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$.

Les deux méthodes concordent ; simplifier d'abord est bien plus rapide. La dérivée est négative : f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Réponse. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Correction de l'exercice 3 - Un quotient plus complexe

On simplifie avant de dériver : $f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{4}{x} = x + \frac{4}{x}$. Donc

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

Le dénominateur est positif ; le signe de f est celui de $x^2 - 4$, qui s'annule en 2 et -2. Sur $]0; +\infty[$, seule la valeur 2 compte : f est négative sur $]0; 2[$ et positive sur $]2; +\infty[$.

f décroît puis croît : elle admet un **minimum** en $x = 2$, égal à $f(2) = 2 + 2 = 4$. **Contrôle** : $f(1) = 5$ et $f(4) = 5$, tous deux supérieurs à 4.

Réponse. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$, minimum 4 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 4 - Appliquer la formule de l'optimum

On dérive : $f(x) = 5 - \frac{45}{x^2}$. Elle s'annule lorsque $5x^2 = 45$, soit $x^2 = 9$ et, sur $]0; +\infty[$, $x = 3$.

Avant 3, $\frac{45}{x^2} > 5$ et f est négative ; après, f est positive.

f admet donc un **minimum** en $x = 3$:

$$f(3) = 5 \times 3 + \frac{45}{3} = 15 + 15 = 30$$

À l'optimum, les deux termes sont égaux. **Contrôle numérique** : $f(2) = 32,5$ et $f(4) = 31,25$, tous deux supérieurs à 30. Réponse : minimum 30 en $x = 3$.

Réponse. Minimum 30, atteint en $x = 3$.

Correction de l'exercice 5 - Un coût unitaire

a) Le coût unitaire est le coût total divisé par le nombre de pièces. On divise chaque terme par x :

$$c(x) = \frac{0,25x^2 + 8x + 400}{x} = 0,25x + 8 + \frac{400}{x}$$

b) $c'(x) = 0,25 - \frac{400}{x^2}$ s'annule lorsque $0,25x^2 = 400$, soit $x^2 = 1\,600$ et $x = 40$. Avant 40, c' est négative ; après, positive : le coût unitaire est **minimal** pour 40 pièces.

Il vaut alors $c(40) = 10 + 8 + 10 = 28$ € par pièce. **Contrôle** : $c(20) = 33$ € et $c(80) = 33$ €, tous deux plus élevés.

Réponse. a) $c(x) = 0,25x + 8 + \frac{400}{x}$ · b) 40 pièces, pour 28 € l'unité.

Correction de l'exercice 6 - Une consommation à optimiser

On dérive : $c'(v) = 0,005v - \frac{900}{v^2}$. Elle s'annule lorsque $0,005v = \frac{900}{v^2}$, c'est-à-dire, en multipliant par $v^2 > 0$:

$$0,005v^3 = 900 \Leftrightarrow v^3 = 180\,000 \Leftrightarrow v \approx 56,46 \text{ km/h}$$

Avant cette vitesse, c' est négative ; après, elle est positive : la consommation est **minimale** à environ 56,5 km/h. Elle vaut alors $c(56,46) \approx 7,97 + 15,94 \approx 23,9$ L/100 km.

Contrôle : $c(50) = 24,25$ L et $c(70) \approx 25,11$ L, tous deux supérieurs.

Réponse. Environ 56,5 km/h, pour environ 23,9 L/100 km.

Correction de l'exercice 7 - Un temps de cycle

On dérive : $T'(n) = 4 - \frac{256}{n^2}$. Elle s'annule lorsque $4n^2 = 256$, soit $n^2 = 64$ et $n = 8$. Avant 8, T' est négative ; après, positive : la durée est **minimale** pour 8 lots.

$$T(8) = 4 \times 8 + \frac{256}{8} = 32 + 32 = 64 \text{ min}$$

Contrôle : $T(4) = 16 + 64 = 80$ min et $T(16) = 64 + 16 = 80$ min. À l'optimum, le temps qui croît avec le nombre de lots et celui qui décroît s'équilibrent. Réponse : **8 lots**, pour 64 min.

Réponse. 8 lots, pour une durée de 64 min.

Correction de l'exercice 8 - Une surface minimale

a) L'aire vaut $x \times \ell = 144$, donc la largeur vaut $\ell = \frac{144}{x}$. Le périmètre est

$$P(x) = 2x + 2\ell = 2x + \frac{288}{x} \quad (x > 0)$$

b) $P'(x) = 2 - \frac{288}{x^2}$ s'annule lorsque $x^2 = 144$, soit $x = 12$. P' est négative avant, positive après : le périmètre est **minimal** pour $x = 12$ m. La largeur vaut alors $\frac{144}{12} = 12$ m : le rectangle est un **carré**.

Le périmètre minimal vaut $P(12) = 24 + 24 = 48$ m. **Contrôle** : un rectangle de 8 m sur 18 m a un périmètre de 52 m, un rectangle de 6 m sur 24 m un périmètre de 60 m.

Réponse. a) $P(x) = 2x + \frac{288}{x}$. b) 48 m, pour un carré de 12 m de côté.

Correction de l'exercice 9 - Un bidon cylindrique

On dérive : $S'(r) = 4\pi r - \frac{4\,000}{r^2}$. Elle s'annule lorsque $4\pi r = \frac{4\,000}{r^2}$, soit, en multipliant par $r^2 > 0$:

$$4\pi r^3 = 4\,000 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1\,000}{\pi} \approx 318,31 \Leftrightarrow r \approx 6,83 \text{ cm}$$

S' est négative avant cette valeur et positive après : la surface est **minimale** pour $r \approx 6,83$ cm. Elle vaut alors $S \approx 292,9 + 585,8 \approx 879$ cm².

La hauteur correspondante vaut $\frac{2\,000}{\pi \times 6,83^2} \approx 13,66$ cm, exactement le diamètre : le bidon le plus économe en tôle est aussi haut que large.

Réponse. Rayon d'environ 6,83 cm, pour une surface d'environ 879 cm².

Correction de l'exercice 10 - Étudier le signe d'une dérivée

On dérive et on réduit au même dénominateur pour étudier le signe :

$$f'(x) = 3 - \frac{75}{x^2} = \frac{3x^2 - 75}{x^2} = \frac{3(x^2 - 25)}{x^2}$$

Le dénominateur est positif, donc f' a le signe de $x^2 - 25$, qui s'annule en 5 et -5 . Sur $]0; +\infty[$, f' est négative avant 5 et positive après.

x	0 ... 5	5	5 ... +∞
signe de f'	−	0	+
variation de f	décroît	30	croît

Le minimum vaut $f(5) = 15 + 15 = 30$. La fonction prend de très grandes valeurs près de 0 et quand x devient grand.

Réponse. f est négative sur $]0; 5[$, nulle en 5, positive ensuite ; minimum 30 en $x = 5$.

Correction de l'exercice 11 - Un maximum, pas un minimum

On dérive : $f'(x) = -2 + \frac{50}{x^2}$. Elle s'annule lorsque $\frac{50}{x^2} = 2$, soit $x^2 = 25$ et $x = 5$ sur $]0; +\infty[$.

Pour $x < 5$, $\frac{50}{x^2} > 2$ et f' est **positive** ; pour $x > 5$, elle est négative. La fonction croît puis décroît : elle admet un **maximum** en $x = 5$,

$$f(5) = -10 - 10 = -20$$

C'est logique : f est l'opposée de $x \mapsto 2x + \frac{50}{x}$, dont le minimum vaut 20. **Contrôle** : $f(2) = -4 - 25 = -29 < -20$.

Réponse. Un maximum de -20 , atteint en $x = 5$.

Correction de l'exercice 12 - Un optimum hors intervalle

La dérivée $f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}$ s'annule en $x = 10$, qui n'appartient **pas** à $[1; 6]$. Sur cet intervalle, $x^2 \leq 36$, donc $\frac{200}{x^2} \geq \frac{200}{36} \approx 5,56$ et

$$f'(x) \leq 2 - 5,56 < 0$$

La fonction est décroissante sur tout l'intervalle : son minimum est atteint à la borne droite, $x = 6$, et vaut $f(6) = 12 + \frac{200}{6} \approx 45,33$.

Contrôle : $f(1) = 202$, bien plus grand. Quand la dérivée ne s'annule pas dans l'intervalle, l'extremum est à une borne. Réponse : environ 45,33, en $x = 6$.

Réponse. Minimum environ 45,33, atteint en $x = 6$.

Correction de l'exercice 13 - Comparer deux formes

On sépare la fraction en deux termes :

$$f(x) = \frac{2x^2}{x} + \frac{18}{x} = 2x + \frac{18}{x} = g(x)$$

pour tout $x > 0$: les deux écritures définissent la même fonction.

Avec la forme g , la dérivée s'obtient sans formule du quotient : $g'(x) = 2 - \frac{18}{x^2}$, qui

s'annule pour $x^2 = 9$, soit $x = 3$. Elle est négative avant et positive après, donc le minimum vaut $g(3) = 6 + 6 = 12$. **Contrôle** avec la forme $f : \frac{2 \times 9 + 18}{3} = 12$.

Réponse. Les deux écritures coïncident ; minimum 12 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver un coefficient

Le minimum est atteint en $x = 4$, donc la dérivée s'y annule : $f(4) = 0$. Avec $f(x) = 3 - \frac{b}{x^2}$:

$$3 - \frac{b}{16} = 0 \Leftrightarrow b = 48$$

La fonction s'écrit $f(x) = 3x + \frac{48}{x}$; sa dérivée est bien négative avant 4 et positive après, ce qui confirme le minimum. Il vaut $f(4) = 12 + 12 = 24$.

À l'optimum, les deux termes sont égaux : $3 \times 4 = \frac{48}{4} = 12$. Réponses : $b = 48$, minimum 24.

Réponse. $b = 48$, minimum 24.

Correction de l'exercice 15 - Une fonction à deux termes inverses

On dérive terme à terme. La dérivée de $\frac{12}{x}$ est $-\frac{12}{x^2}$. Pour le second terme, on écrit $\frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$, dont la dérivée vaut $3 \times (-2)x^{-3} = -\frac{6}{x^3}$.

$$f(x) = -\frac{12}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

Sur $]0; +\infty[$, les deux termes sont négatifs, donc $f'(x) < 0$: f est **décroissante** et n'admet aucun extremum. Ses valeurs deviennent très grandes près de 0 et se rapprochent de 0 quand x devient grand. Contrairement aux exercices précédents, aucun terme n'est croissant pour équilibrer la fonction.

Réponse. $f(x) = -\frac{12}{x^2} - \frac{6}{x^3} < 0$: f est décroissante, sans extremum.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : optimiser une série de production

a) On divise le coût total par le nombre de pièces : $c(x) = 0,5x + 12 + \frac{1\,800}{x}$. Ainsi $c(30) = 15 + 12 + 60 = 87$ € et $c(80) = 40 + 12 + 22,5 = 74,50$ €.

b) $c'(x) = 0,5 - \frac{1\,800}{x^2}$ s'annule lorsque $x^2 = 3\,600$, soit $x = 60$. Elle est négative avant et positive après : le coût unitaire est **minimal** pour une série de 60 pièces.

c) Le coût unitaire minimal vaut

$$c(60) = 30 + 12 + 30 = 72 \text{ €}$$

et le coût total $60 \times 72 = 4\,320$ €. **Contrôle** : $C(60) = 1\,800 + 720 + 1\,800 = 4\,320$ €.

d) Le bénéfice vaut $B(x) = 60x - C(x) = -0,5x^2 + 48x - 1\,800$, et $B'(x) = -x + 48$ s'annule en $x = 48$ (positive avant, négative après). Le bénéfice maximal vaut $B(48) = -1\,152 + 2\,304 - 1\,800 = -648$ € : il est **négatif**, la série n'est jamais rentable à 60 € la pièce. Il faudrait vendre au moins 72 € la pièce, le coût unitaire minimal ; à 80 € et 60 pièces, le bénéfice serait de $60 \times 8 = 480$ €.

Réponse. a) $c(x) = 0,5x + 12 + \frac{1\,800}{x}$, 87 € et 74,50 € · b) 60 pièces · c) 72 € l'unité, 4 320 € au total · d) bénéfice maximal en $x = 48$ mais négatif (−648 €) : il faut vendre plus de 72 € la pièce.