

Plaquette 2 - Domaine, variations et lecture de l'hyperbole

Fonction inverse — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition et domaine.

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{définie sur} \quad]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

La valeur 0 est **interdite** : on ne divise jamais par zéro.

Variations.

Intervalle	$] -\infty ; 0[$	$] 0 ; +\infty [$
Variation de $\frac{1}{x}$	décroissante	décroissante
Signe de $\frac{1}{x}$	négatif	positif

- La dérivée vaut $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, **toujours strictement négative**.
- $\triangle$ La fonction n'est **pas** décroissante sur $\mathbb{R}^*$: $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, pourtant $-1 < 1$.

Courbe : l'hyperbole.

- Deux branches, l'une dans le premier quadrant, l'autre dans le troisième.
- Symétrique par rapport à l'**origine** : $f(-x) = -f(x)$, la fonction est **impaire**.
- Les deux axes sont des **asymptotes** : la courbe s'en approche sans jamais les toucher.

Comportement aux bornes.

Quand $x...$	$\frac{1}{x}...$
devient très grand	se rapproche de 0 par valeurs positives
se rapproche de 0^+	devient très grand
se rapproche de 0^-	devient très grand en valeur absolue, négatif
devient très négatif	se rapproche de 0 par valeurs négatives

Fonction du type $\frac{k}{x}$. Pour $k > 0$, mêmes variations ; pour $k < 0$, variations **inversées** (croissante sur chaque intervalle).

$\triangle$ Comparer deux images ne vaut que **dans le même intervalle** : la coupure en 0 interdit toute comparaison qui l'enjambe.

Correction de l'exercice 1 - Domaine et images

On remplace x par chaque valeur dans $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$f(4) = \frac{1}{4} = 0,25 \quad f(-2) = \frac{1}{-2} = -0,5 \quad f(0,25) = \frac{1}{0,25} = 4$$

On remarque que $f(4) = 0,25$ et $f(0,25) = 4$: l'inverse de l'inverse redonne le nombre de départ.

En revanche, $f(0)$ demanderait de diviser 1 par 0, ce qui est impossible : 0 n'a pas d'inverse, il est exclu de l'ensemble de définition $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

Réponse. 0,25 ; -0,5 ; 4 ; $f(0)$ n'existe pas (division par zéro).

Correction de l'exercice 2 - Un piège de comparaison

On calcule les deux images : $f(-3) = -\frac{1}{3} \approx -0,333$ et $f(2) = 0,5$. Donc $f(-3) < f(2)$: l'affirmation de l'élève est **fausse**.

L'erreur vient de ce que f n'est pas décroissante sur tout son ensemble de définition, mais sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ séparément. Pour utiliser la décroissance, les deux nombres doivent être du **même côté** de 0 ; ici, -3 et 2 ne le sont pas.

Contre-exemple encore plus simple : $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) = -1 < f(1) = 1$. Un nombre négatif a une image négative, un nombre positif une image positive.

Réponse. Faux : $f(-3) \approx -0,333 < f(2) = 0,5$, car -3 et 2 ne sont pas dans le même intervalle.

Correction de l'exercice 3 - Comparer correctement

La fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et sur $]-\infty ; 0[$: sur chacun de ces intervalles, elle **inverse l'ordre**.

— 2 et 5 sont tous deux positifs et $2 < 5$, donc $f(2) > f(5)$. **Contrôle** : $0,5 > 0,2$.

— -4 et -1 sont tous deux négatifs et $-4 < -1$, donc $f(-4) > f(-1)$. **Contrôle** :

$$f(-4) = -0,25 > f(-1) = -1$$

Attention au signe : -0,25 est bien plus grand que -1, car il est plus proche de 0.

Réponses : $f(2) > f(5)$ et $f(-4) > f(-1)$.

Réponse. $f(2) > f(5)$ et $f(-4) > f(-1)$.

Correction de l'exercice 4 - Dériver la fonction inverse

La dérivée de la fonction inverse est donnée par le cours :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{donc} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

On remplace ensuite x : $f'(2) = -\frac{1}{4} = -0,25$ et $f'(-3) = -\frac{1}{9} \approx -0,111$.

Les deux nombres dérivés sont négatifs : comme $x^2 > 0$ pour $x \neq 0$, la dérivée est toujours strictement négative, et f est décroissante sur chacun des deux intervalles. Oublier le signe moins est l'erreur la plus fréquente.

Réponse. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'(2) = -0,25$ et $f'(-3) \approx -0,111$.

Correction de l'exercice 5 - Une fonction du type k/x

a) $g(3) = \frac{12}{3} = 4$, $g(6) = \frac{12}{6} = 2$ et $g(0,5) = \frac{12}{0,5} = 24$. Quand x double (de 3 à 6), l'image est divisée par deux : le produit $x \times g(x)$ vaut toujours 12.

b) La dérivée de $\frac{k}{x}$ vaut $-\frac{k}{x^2}$, donc

$$g'(x) = -\frac{12}{x^2} < 0 \quad \text{sur }]0 ; +\infty[$$

g est **décroissante** sur $]0 ; +\infty[$, comme la fonction inverse : multiplier par un nombre

positif ne change pas le sens de variation.

Réponse. a) 4 ; 2 ; 24 · b) décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 6 - Un coefficient négatif

a) $h(2) = \frac{-6}{2} = -3$ et $h(6) = \frac{-6}{6} = -1$. Ici, $2 < 6$ et $h(2) < h(6)$: l'image augmente quand x augmente.

b) La dérivée vaut

$$h'(x) = -\frac{-6}{x^2} = \frac{6}{x^2} > 0$$

donc h est **croissante** sur $]0 ; +\infty[$. Multiplier la fonction inverse par un nombre négatif inverse son sens de variation. Les images restent négatives et se rapprochent de 0 quand x devient grand : la courbe approche l'axe des abscisses par en dessous.

Réponse. a) -3 et -1 · b) croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 7 - Comportement aux bornes

On calcule chaque inverse :

x	0,001	0,1	1	10	1 000
f(x)	1 000	10	1	0,1	0,001

- Quand x se rapproche de 0 par valeurs positives, son inverse devient de plus en plus grand : la courbe longe l'axe des ordonnées vers le haut, qui est une **asymptote verticale**.
- Quand x devient très grand, son inverse se rapproche de 0 : la courbe longe l'axe des abscisses, **asymptote horizontale**.

Le tableau se lit dans les deux sens, car l'inverse de l'inverse redonne le nombre : $f(0,001) = 1\,000$ et $f(1\,000) = 0,001$.

$$x \times \frac{1}{x} = 1$$

Réponse. 1 000 ; 10 ; 1 ; 0,1 ; 0,001 : la courbe approche les deux axes sans les atteindre.

Correction de l'exercice 8 - Résoudre une équation

Première équation. Il faut $x \neq 0$. Deux nombres égaux non nuls ont des inverses égaux :

$$\frac{1}{x} = 0,2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{0,2} = 5$$

Contrôle : $\frac{1}{5} = 0,2$.

Seconde équation. Pour $x \neq 0$, on multiplie les deux membres par x : $15 = 3x$, donc $x = 5$. **Contrôle** : $\frac{15}{5} = 3$.

En revanche, l'équation $\frac{1}{x} = 0$ n'a aucune solution : un quotient de numérateur 1 ne s'annule jamais. Réponses : $x = 5$ dans les deux cas.

Réponse. $x = 5$ dans les deux cas.

Correction de l'exercice 9 - Une équation à deux solutions

Il faut $x \neq 0$. On multiplie les deux membres par x :

$$\frac{9}{x} = x \Leftrightarrow 9 = x^2 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Les deux valeurs sont non nulles et conviennent : $\frac{9}{3} = 3$ et $\frac{9}{-3} = -3$.

Graphiquement, ce sont les abscisses des deux points d'intersection de la courbe de $x \mapsto \frac{9}{x}$ avec la droite $y = x$: l'un dans la zone $x > 0$, l'autre, symétrique par rapport à l'origine, dans la zone $x < 0$. Ne garder que la solution positive serait une erreur.

Réponse. $x = 3$ ou $x = -3$.

Correction de l'exercice 10 - Une inéquation

Sur $]0; +\infty[$, x est strictement positif : multiplier les deux membres par x conserve le sens de l'inégalité.

$$\frac{1}{x} > 4 \Leftrightarrow 1 > 4x \Leftrightarrow x < 0,25$$

En tenant compte de la condition $x > 0$, l'ensemble des solutions est $]0; 0,25[$.

Contrôle : $\frac{1}{0,1} = 10 > 4$ convient, alors que $\frac{1}{1} = 1 < 4$ ne convient pas. Sur $]-\infty; 0[$, il n'y aurait aucune solution, puisque les inverses y sont négatifs.

Réponse. $x \in]0; 0,25[$.

Correction de l'exercice 11 - Produit constant

a) Le produit vaut toujours 60, donc $y = \frac{60}{x}$: $y = 15$ pour $x = 4$, $y = 5$ pour $x = 12$ et $y = 2$ pour $x = 30$.

b) Si l'on remplace x par $2x$, on obtient

$$\frac{60}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{60}{x}$$

donc y est **divisé par deux**. Par exemple, de $x = 4$ à $x = 8$, y passe de 15 à 7,5.

Deux grandeurs dont le produit est constant sont dites **inversement proportionnelles** : l'une est une fonction du type $\frac{k}{x}$ de l'autre.

Réponse. a) 15 ; 5 ; 2 · b) y est divisé par deux.

Correction de l'exercice 12 - Reconnaître une proportionnalité inverse

Deux grandeurs sont inversement proportionnelles lorsque leur **produit** est constant. On calcule donc $x \times y$ dans chaque colonne.

— Tableau A : $2 \times 30 = 60$, $4 \times 15 = 60$, $5 \times 12 = 60$ et $10 \times 6 = 60$. Le produit est constant : les grandeurs sont inversement proportionnelles, avec $A = \frac{60}{x}$.

— Tableau B : les produits valent 60, 80, 75 et 80. Ils ne sont pas tous égaux :

$$2 \times 30 = 60 \neq 4 \times 20 = 80$$

Le tableau B ne décrit **pas** une proportionnalité inverse, même si y diminue quand x augmente.

Réponse. Oui pour A (produit constant 60), non pour B.

Correction de l'exercice 13 - Dériver une fonction du type k/x

On dérive terme à terme : la dérivée de $\frac{20}{x}$ est $-\frac{20}{x^2}$ et celle de $3x$ est 3, d'où

$$f'(x) = 3 - \frac{20}{x^2}.$$

La dérivée s'annule lorsque $3 = \frac{20}{x^2}$, soit $3x^2 = 20$ et $x^2 = \frac{20}{3}$. Sur $]0; +\infty[$, la seule solution est

$$x = \sqrt{\frac{20}{3}} \approx 2,582$$

Avant cette valeur, $\frac{20}{x^2}$ est plus grand que 3 et f' est négative ; après, f' est positive. La fonction décroît puis croît : elle admet un **minimum**, $f(2,582) \approx 7,746 + 7,746 \approx 15,49$. À l'optimum, les deux termes sont égaux.

Réponse. $f'(x) = 3 - \frac{20}{x^2}$, minimum environ 15,49 en $x \approx 2,58$.

Correction de l'exercice 14 - Une lecture graphique

a) Le point $A(4; 7,5)$ est sur la courbe, donc $f(4) = 7,5$, c'est-à-dire $\frac{k}{4} = 7,5$ et

$$k = 4 \times 7,5 = 30 \quad f(x) = \frac{30}{x}$$

b) $f(10) = \frac{30}{10} = 3$, qui est bien l'ordonnée de B : le point B appartient à la courbe.

Méthode rapide : sur la courbe de $x \mapsto \frac{k}{x}$, le produit des coordonnées vaut toujours k . Ici $4 \times 7,5 = 30$ et $10 \times 3 = 30$; le point $C(6; 5)$ conviendrait aussi.

Réponse. a) $k = 30$ · b) oui, car $10 \times 3 = 30$.

Correction de l'exercice 15 - Une tangente

La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. On calcule donc $f(2) = 0,5$ et, avec $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(2) = -0,25$.

$$y = 0,5 - 0,25(x - 2) = 0,5 - 0,25x + 0,5 = -0,25x + 1$$

Contrôle : pour $x = 2$, on retrouve $y = 0,5$. Le coefficient directeur est négatif, ce qui est cohérent avec la décroissance de f . La tangente coupe l'axe des abscisses en $x = 4$.

Réponse : $y = -0,25x + 1$.

Réponse. $y = -0,25x + 1$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude d'une fonction inverse décalée

a) On remplace x par chaque valeur : $f(2) = \frac{18}{2} = 9$, $f(6) = 3$ et $f(9) = 2$. Dans les trois cas, $x \times f(x) = 18$.

x	2	6	9
f(x)	9	3	2

b) $f'(x) = -\frac{18}{x^2}$ est strictement négative sur $]0; +\infty[$: f est **décroissante**. Les images deviennent très grandes quand x se rapproche de 0 et se rapprochent de 0 quand x

devient grand.

c) $\frac{18}{x} = 4,5$ donne $18 = 4,5x$, soit $x = 4$. Pour l'inéquation, on multiplie par $x > 0$ sans changer le sens : $\frac{18}{x} > 6 \Leftrightarrow 18 > 6x \Leftrightarrow x < 3$, d'où $x \in]0 ; 3[$.

d) $f(3) = 6$ et $f'(3) = -\frac{18}{9} = -2$, donc la tangente a pour équation

$$y = 6 - 2(x - 3) = -2x + 12$$

En $x = 4$, elle vaut 4, alors que $f(4) = 4,5$: la tangente passe **en dessous** de la courbe. L'écart de 0,5 pour un pas de 1 montre que l'approximation par la tangente se dégrade vite quand on s'éloigne du point de contact.

Réponse. a) 9 ; 3 ; 2 · b) $f(x) = -\frac{18}{x^2}$, décroissante · c) $x = 4$ et $x \in]0 ; 3[$ · d)

$y = -2x + 12$, qui vaut 4 contre 4,5 pour f .