

Plaquette 3 – Grandeurs inversement proportionnelles

Fonction inverse – Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Deux grandeurs x et y sont **inversement proportionnelles** si leur produit est constant :

$$x \times y = k \quad \text{c'est-à-dire} \quad y = \frac{k}{x}$$

Le test : on calcule les produits $x \times y$ de chaque colonne. S'ils sont tous égaux, la proportionnalité inverse est établie.

Si x est...	Alors y est...
doublé	divisé par 2
triplé	divisé par 3
multiplié par k	divisé par k
divisé par 2	doublé

Les situations de la filière.

Situation	Relation	Constante
loi d'Ohm à tension fixée	$R \times I = U$	la tension
débit et durée	$Q \times t = V$	le volume
engrenages	$n_1 \times Z_1 = n_2 \times Z_2$	—
coût unitaire de frais fixes	$c \times n = F$	les frais fixes
pression et volume (loi de Boyle-Mariotte)	$P \times V = \text{cte}$	—

Résoudre une situation de proportionnalité inverse.

1. Calculer la constante k à partir d'un couple connu. 2. Écrire $y = \frac{k}{x}$. 3. Répondre par substitution ou par produit en croix.

⚠ Ne pas confondre avec la proportionnalité **directe**, où c'est le **quotient** $\frac{y}{x}$ qui est constant. Un tableau où y **augmente** quand x augmente ne peut pas être une proportionnalité inverse.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître le bon type

Deux grandeurs sont proportionnelles si leur **quotient** est constant, inversement proportionnelles si leur **produit** est constant.

- Le prix payé est égal au nombre de pièces multiplié par le prix unitaire : le quotient prix / nombre de pièces est constant, c'est une proportionnalité **directe**.
- Sur un trajet de longueur fixée, $v \times t = d$: le produit est constant, c'est une proportionnalité **inverse**.
- Pour un même travail, le produit (nombre d'ouvriers) $\times$ (durée) représente la charge de travail totale, constante : proportionnalité **inverse**, à condition que les ouvriers ne se gênent pas.

$$\frac{y}{x} = k \quad (\text{directe}) \quad x \times y = k \quad (\text{inverse})$$

Réponse. a) directe · b) inverse · c) inverse.

Correction de l'exercice 2 - Tester un tableau

On calcule le produit $x \times y$ dans chaque colonne :

$$3 \times 24 = 4 \times 18 = 6 \times 12 = 12 \times 6 = 72$$

Le produit est toujours égal à 72 : le tableau décrit bien une proportionnalité inverse, de modèle $y = \frac{72}{x}$.

Contrôle : le modèle donne $y = 9$ pour $x = 8$, et y diminue bien quand x augmente.

Réponse : **oui**, $y = \frac{72}{x}$.

Réponse. Oui : tous les produits valent 72, donc $y = \frac{72}{x}$.

Correction de l'exercice 3 - Un tableau trompeur

On teste le produit $x \times y$ dans **chaque** colonne : $2 \times 20 = 40$, $4 \times 10 = 40$, $5 \times 8 = 40$, mais

$$10 \times 5 = 50 \neq 40$$

Le produit n'est pas constant : le tableau ne décrit **pas** une proportionnalité inverse. Pour qu'il en soit une, il faudrait $y = \frac{40}{10} = 4$ dans la dernière colonne.

Trois colonnes cohérentes ne suffisent pas : il faut toutes les tester. Le tableau a pourtant « l'air » de décroître régulièrement.

Réponse. Non : le dernier produit vaut 50 au lieu de 40.

Correction de l'exercice 4 - Loi d'Ohm à tension fixée

a) La loi d'Ohm s'écrit $U = R \times I$. Sous une tension fixée de 230 V, le produit $R \times I$ vaut toujours 230 : ici $46 \times 5 = 230$. Les grandeurs R et I sont donc inversement proportionnelles, et $I = \frac{230}{R}$.

b) Pour $R = 115 \, \Omega$:

$$I = \frac{230}{115} = 2 \, \text{A}$$

Contrôle : la résistance a été multipliée par $\frac{115}{46} = 2,5$, donc l'intensité est divisée par 2,5 : $\frac{5}{2,5} = 2 \, \text{A}$. Réponse : **2 A**.

Réponse. a) le produit vaut toujours 230 · b) 2 A.

Correction de l'exercice 5 - Débit et durée

a) Le volume pompé est le produit du débit par la durée, $V = Q \times t$. Donc

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{3000}{50} = 60 \, \text{L/min.}$$

b) Avec un débit de 90 L/min, la durée vaut

$$t = \frac{3000}{90} \approx 33,33 \, \text{min}$$

soit 33 min et 20 s (le tiers de minute vaut 20 s).

Contrôle : le débit est multiplié par $\frac{90}{60} = 1,5$, donc la durée est divisée par 1,5 : $\frac{50}{1,5} \approx 33,33$ min. À volume fixé, débit et durée sont inversement proportionnels.

Réponse. a) 60 L/min · b) environ 33 min 20 s.

Correction de l'exercice 6 - Deux pompes ensemble

Faire la moyenne des durées, $\frac{50 + 33,33}{2} \approx 41,7$ min, serait faux : deux pompes ensemble vont plus vite que chacune seule. Ce sont les **débits** qui s'additionnent.

Le débit total vaut $60 + 90 = 150$ L/min, donc

$$t = \frac{3\,000}{150} = 20 \text{ min}$$

Contrôle : $150 \times 20 = 3\,000$ L, et 20 min est bien plus court que 33 min. On retrouvera le même calcul pour des résistances en parallèle, où ce sont les inverses qui s'ajoutent.

Réponse : 20 **minutes**.

Réponse. 20 minutes.

Correction de l'exercice 7 - Coût unitaire

a) Les frais fixes sont répartis sur les n pièces : la part par pièce vaut $c(n) = \frac{1\,800}{n}$, soit 18 € pour 100 pièces, 6 € pour 300 et 2 € pour 900. Tripler la série divise la part par trois.

b) On résout

$$\frac{1\,800}{n} = 1,5 \Leftrightarrow 1\,800 = 1,5n \Leftrightarrow n = 1\,200$$

Il faut une série de 1 200 **pièces**. **Contrôle** : $\frac{1\,800}{1\,200} = 1,5$ €.

La part des frais fixes se rapproche de 0 quand la série grandit, sans jamais s'annuler : c'est pourquoi les grandes séries réduisent les coûts.

Réponse. a) 18 €, 6 €, 2 € · b) 1 200 pièces.

Correction de l'exercice 8 - Engrenages

a) Deux roues engrenées font avancer le même nombre de dents par minute :

$n_1 Z_1 = n_2 Z_2$. La vitesse et le nombre de dents sont donc inversement proportionnels, de produit $900 \times 24 = 21\,600$. Pour la roue :

$$n_2 = \frac{21\,600}{72} = 300 \text{ tr/min}$$

La roue a trois fois plus de dents, elle tourne trois fois moins vite.

b) On cherche Z tel que $300 \times Z = 21\,600$, soit $Z = 72$ dents : c'est la roue du a). De même, pour 450 tr/min, il faudrait $\frac{21\,600}{450} = 48$ dents.

Réponse. a) 300 tr/min · b) 72 dents.

Correction de l'exercice 9 - Pression et volume

À température constante, la loi de Boyle-Mariotte dit que le produit $P \times V$ reste constant : pression et volume sont inversement proportionnels. Ici, $P \times V = 2 \times 6 = 12$. Après compression :

$$P \times 1,5 = 12 \Leftrightarrow P = 8 \text{ bars}$$

Contrôle : le volume a été divisé par $\frac{6}{1,5} = 4$, donc la pression est multipliée par 4 : $2 \times 4 = 8$ bars, l'ordre de grandeur d'un compresseur d'atelier. Réponse : **8 bars**.

Réponse. 8 bars.

Correction de l'exercice 10 - Résistance et section

D'après $R = \frac{\rho L}{S}$, à matériau et longueur fixés, R et S sont inversement proportionnelles : le produit $R \times S$ est constant, ici $12 \times 1,5 = 18$. Pour une section de 4 mm^2 :

$$R = \frac{18}{4} = 4,5 \Omega$$

Contrôle : la section est multipliée par $\frac{4}{1,5} \approx 2,67$, donc la résistance est divisée par $2,67 : \frac{12}{2,67} \approx 4,5 \Omega$. Un câble plus gros a moins de résistance et chauffe moins. Réponse : $4,5 \Omega$.

Réponse. $4,5 \Omega$.

Correction de l'exercice 11 - Retrouver la constante

a) Les grandeurs étant inversement proportionnelles, leur produit est constant :

$$k = 8 \times 13,5 = 108, \text{ et } y = \frac{108}{x}.$$

b) Pour $x = 15 : y = \frac{108}{15} = 7,2$. Pour $y = 6 :$

$$\frac{108}{x} = 6 \Leftrightarrow 108 = 6x \Leftrightarrow x = 18$$

Contrôle : $15 \times 7,2 = 108$ et $18 \times 6 = 108$. Le sens est cohérent : quand x passe de 8 à 15, y diminue de 13,5 à 7,2.

Réponse. a) $k = 108$ · b) $y = 7,2$ et $x = 18$.

Correction de l'exercice 12 - Un pourcentage de variation

Si x augmente de 25 %, il devient $1,25x$. Comme $y = \frac{k}{x}$, la nouvelle valeur de y vaut

$$\frac{k}{1,25x} = \frac{1}{1,25} \times \frac{k}{x} = 0,8 \times y$$

y est multiplié par 0,8 : il **baisse de 20 %**, et non de 25 %.

Vérification chiffrée : avec $k = 100$ et $x = 4$, on a $y = 25$; après la hausse, $x = 5$ et $y = 20$, soit une baisse de $\frac{5}{25} = 20 \%$. Le coefficient multiplicateur de y est l'inverse de celui de x .

Réponse. y baisse de 20 %.

Correction de l'exercice 13 - Compléter un tableau

La première colonne donne la constante : $k = 5 \times 40 = 200$, donc $y = \frac{200}{x}$.

— Pour $x = 8 : y = \frac{200}{8} = 25$.

— Pour $y = 12,5 : \frac{200}{x} = 12,5$ donne $x = \frac{200}{12,5} = 16$.

— Pour $x = 25 : y = \frac{200}{25} = 8$.

x	5	8	16	25
y	40	25	12,5	8

Contrôle : tous les produits valent 200, et y diminue quand x augmente.

Réponse. $y = 25$ pour $x = 8$; $x = 16$ pour $y = 12,5$; $y = 8$ pour $x = 25$.

Correction de l'exercice 14 - Un modèle à valider

Le technicien a raison si le produit vitesse $\times$ durée est le même dans chaque colonne :

$$60 \times 18 = 90 \times 12 = 120 \times 9 = 1\,080$$

Le produit est constant : durée et vitesse sont bien inversement proportionnelles, avec $t = \frac{1\,080}{v}$. La constante 1 080 représente la longueur totale usinée, en mètres.

Le modèle prévoit 7,2 min à 150 m/min. Il ne vaut cependant que sur la plage de vitesses recommandée : au-delà, l'outil s'use plus vite. Réponse : **oui**.

Réponse. Oui : tous les produits valent 1 080 m.

Correction de l'exercice 15 - Une situation qui n'en est pas une

Le coût unitaire est le coût total divisé par le nombre de pièces :

$$c(n) = \frac{1\,800 + 4n}{n} = \frac{1\,800}{n} + 4$$

Pour tester la proportionnalité inverse, on calcule $n \times c(n) = 1\,800 + 4n$: ce produit dépend de n , il n'est pas constant. Le coût unitaire n'est **pas** inversement proportionnel à n . Seule la part des frais fixes, $\frac{1\,800}{n}$, l'est.

Par exemple, $c(100) = 22$ € et $c(1\,000) = 5,80$ € : décupler la série ne divise pas le coût par dix. Le coût unitaire se rapproche de 4 €, le coût variable par pièce, sans jamais descendre en dessous.

Réponse. Non : $c(n) = \frac{1\,800}{n} + 4$, dont le produit avec n n'est pas constant.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dimensionner une installation de pompage

a) La durée est le volume divisé par le débit : $\frac{18\,000}{75} = 240$ min, soit 4 heures.

b) Avec n pompes, le débit total vaut $75n$ L/min, donc

$$t(n) = \frac{18\,000}{75n} = \frac{240}{n}$$

Ainsi $t(3) = 80$ min et $t(6) = 40$ min : doubler le nombre de pompes divise la durée par deux.

c) On cherche n tel que $\frac{240}{n} < 30$. Comme $n > 0$, cela équivaut à $240 < 30n$, soit $n > 8$. Avec 8 pompes, la durée vaut exactement 30 min ; il faut donc 9 **pompes** pour passer sous 30 min ($t(9) \approx 26,7$ min).

d) Avec 3 pompes pendant 80 min, on paye $3 \times \frac{80}{60} = 4$ heures de pompe, soit

$4 \times 18 = 72$ €. Avec 6 pompes pendant 40 min, on paye aussi $6 \times \frac{40}{60} = 4$ heures, soit 72 €. Le produit (nombre de pompes) $\times$ (durée) est constant, donc le coût aussi. Un coût de branchement de 25 € par pompe changerait la décision : 147 € avec 3 pompes contre 222 € avec 6.

Réponse. a) 240 min · b) $t(n) = \frac{240}{n}$, soit 80 et 40 min · c) 9 pompes · d) 72 € dans les deux cas.