

Plaquette 1 - Hyperbole, variations et grandeurs inversement proportionnelles

Fonction inverse — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$: elle n'est **jamais** définie en 0.
- Elle est **décroissante** sur $] -\infty ; 0[$ et **décroissante** sur $] 0 ; +\infty [$ — mais pas sur la réunion des deux.
- Sa dérivée est strictement négative sur chaque intervalle :

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$$

- Sa courbe est une **hyperbole**, symétrique par rapport à l'origine ; les axes sont des **asymptotes**.
- Comportement : quand x devient très grand, $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0 ; quand x se rapproche de 0 par valeurs positives, $\frac{1}{x}$ devient très grand.
- Pour $k > 0$, $\frac{k}{x}$ a les mêmes variations que $\frac{1}{x}$; pour $k < 0$, les variations sont **inversées** (croissante sur chaque intervalle).
- **Grandeurs inversement proportionnelles** : $y = \frac{k}{x}$ signifie $x \times y = k$ (produit constant).
- Dérivée d'un quotient (rappel) : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Correction de l'exercice 1 - Domaine et calculs d'images

a) On ne peut pas diviser par 0 : le dénominateur x doit être non nul. L'ensemble de définition est

$$]-\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$$

c'est-à-dire $\mathbb{R}$ privé de 0.

b) On remplace x par chaque valeur : $f(4) = \frac{1}{4} = 0,25$; $f(0,25) = \frac{1}{0,25} = 4$; $f(-2) = -0,5$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$.

On remarque que $f(4) = 0,25$ et $f(0,25) = 4$: la fonction inverse échange un nombre et son inverse, et l'inverse de l'inverse redonne le nombre de départ.

Réponse. a) $\mathbb{R}$ privé de 0 · b) 0,25 ; 4 ; -0,5 ; 3.

Correction de l'exercice 2 - Sens de variation

a) La dérivée vaut $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, strictement négative : f est **décroissante** sur $] -\infty ; 0[$ et décroissante sur $] 0 ; +\infty [$.

b) $2 < 5$ et les deux sont positifs : $f(2) = 0,5 > f(5) = 0,2$.

— $-4 < -1$ et les deux sont négatifs : $f(-4) = -0,25 > f(-1) = -1$.

c) **Non**. Par exemple $-1 < 1$ mais $f(-1) = -1 < f(1) = 1$: l'ordre n'est pas inversé.

— La décroissance vaut **sur chaque intervalle séparément**, jamais globalement, à cause du « saut » en 0.

Réponse. a) décroissante sur chaque intervalle · b) $f(2) > f(5)$ et $f(-4) > f(-1)$ · c) non.

Correction de l'exercice 3 - Comportement aux bornes

On calcule chaque inverse.

x	0,01	0,1	1	10	100
f(x)	100	10	1	0,1	0,01

— Quand x se rapproche de 0 (par valeurs positives), f(x) devient **très grand** : l'axe des ordonnées est une asymptote verticale.

— Quand x devient très grand, f(x) se rapproche de 0 **sans l'atteindre** : l'axe des abscisses est une asymptote horizontale.

Réponse. 100 ; 10 ; 1 ; 0,1 ; 0,01 : explosion près de 0, tend vers 0 à l'infini.

Correction de l'exercice 4 - Fonction du type k/x

— a) $g(2) = 6$; $g(4) = 3$; $g(12) = 1$.

— b) Comme $k = 12 > 0$, g a les mêmes variations que la fonction inverse : elle est **décroissante** sur $]0 ; +\infty[$.

— Confirmation par la dérivée : $g'(x) = -\frac{12}{x^2} < 0$.

— c) $2 \times 6 = 12$; $4 \times 3 = 12$; $12 \times 1 = 12$: le produit est constant et vaut 12.

— C'est la signature de deux grandeurs **inversement proportionnelles**.

Réponse. a) 6 ; 3 ; 1 · b) décroissante · c) produit constant = 12.

Correction de l'exercice 5 - Coefficient négatif

a) $h(2) = -3$ et $h(3) = -2$.

b) On dérive : $h(x) = -6 \times \frac{1}{x}$, donc

$$h'(x) = -6 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{6}{x^2} > 0$$

— La dérivée est **positive** : h est **croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

— Contrôle : $h(2) = -3 < h(3) = -2$, cohérent avec la croissance.

— À retenir : un coefficient k négatif inverse le sens de variation.

Réponse. a) -3 et -2 · b) croissante (car $h'(x) = \frac{6}{x^2} > 0$).

Correction de l'exercice 6 - Résoudre une équation

a) Deux nombres non nuls égaux ont des inverses égaux : $\frac{1}{x} = 0,2$ donne $x = \frac{1}{0,2} = 5$.

b) Pour $x \neq 0$, on multiplie les deux membres par x :

$$\frac{15}{x} = 6 \Leftrightarrow 15 = 6x \Leftrightarrow x = 2,5$$

Contrôle : $\frac{15}{2,5} = 6$.

c) Aucune solution : un quotient n'est nul que si son numérateur est nul, or le numérateur vaut 1. Graphiquement, la courbe se rapproche de l'axe des abscisses sans jamais le couper.

Réponse. a) $x = 5$ · b) $x = 2,5$ · c) aucune solution.

Correction de l'exercice 7 - Dériver un quotient

Première méthode : simplifier d'abord.

$$- f(x) = \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{x}.$$

$$- \text{Donc } f'(x) = 0 - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Seconde méthode : formule du quotient, avec $u = 3x + 1$ et $v = x$:

$$f'(x) = \frac{3 \times x - (3x + 1) \times 1}{x^2} = \frac{3x - 3x - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

- Les deux méthodes concordent. La première est plus rapide : **simplifier avant de dériver** est souvent payant.
- Conséquence : f est décroissante sur $]0; +\infty[$, et ses valeurs se rapprochent de 3 quand x devient grand.

Réponse. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$: f est décroissante et tend vers 3.

Correction de l'exercice 8 - Loi d'Ohm

a) On remplace R dans $I = \frac{24}{R}$: $I = \frac{24}{12} = 2 \text{ A}$, $I = \frac{24}{48} = 0,5 \text{ A}$ et $I = \frac{24}{200} = 0,12 \text{ A}$.

b) La fonction $R \mapsto \frac{24}{R}$ a pour dérivée

$$I'(R) = -\frac{24}{R^2} < 0$$

elle est **décroissante** sur $]0; +\infty[$: plus la résistance augmente, plus l'intensité diminue.

c) Non : $\frac{24}{R}$ ne s'annule jamais. L'intensité se rapproche de 0 pour une très grande résistance (circuit presque ouvert), sans être exactement nulle. **Contrôle** : $12 \times 2 = 48 \times 0,5 = 24$, le produit $R \times I$ vaut toujours la tension.

Réponse. a) 2 A ; 0,5 A ; 0,12 A · b) I diminue · c) non, I ne s'annule jamais.

Correction de l'exercice 9 - Débit et durée

$$- \text{a) } t = \frac{600}{10} = 60 \text{ min} ; t = \frac{600}{25} = 24 \text{ min} ; t = \frac{600}{60} = 10 \text{ min}.$$

$$- \text{b) On résout } \frac{600}{d} = 8 : 8d = 600, \text{ donc } d = 75 \text{ L/min}.$$

$$- \text{c) Produit } d \times t : 10 \times 60 = 600 ; 25 \times 24 = 600 ; 75 \times 8 = 600.$$

— Le produit est constant et vaut le volume de la cuve : les deux grandeurs sont bien **inversement proportionnelles**.

Réponse. a) 60 ; 24 ; 10 min · b) 75 L/min · c) produit constant = 600.

Correction de l'exercice 10 - Coût moyen

$$- \text{a) } C_M(100) = 14 + 90 = 104 \text{ €} ; C_M(500) = 14 + 18 = 32 \text{ €} ; C_M(3\,000) = 14 + 3 = 17 \text{ €}.$$

— b) Le terme $\frac{9\,000}{q}$ se rapproche de 0 : le coût moyen se rapproche de 14 € sans jamais l'atteindre. C'est le coût variable unitaire, plancher théorique.

- c) On résout $14 + \frac{9\,000}{q} < 20$, soit $\frac{9\,000}{q} < 6$, donc $9\,000 < 6q$ et $q > 1\,500$.
- Il faut donc produire **au moins** 1 501 **pièces**. Contrôle : $C_M(1\,500) = 14 + 6 = 20$ € exactement.

Réponse. a) 104 € ; 32 € ; 17 € · b) vers 14 € · c) à partir de 1 501 pièces.

Correction de l'exercice 11 - Résistance et section d'un conducteur

a) $R = \frac{k}{S}$ donne $k = R \times S = 0,9 \times 2 = 1,8$.

b) $R = \frac{1,8}{6} = 0,3 \, \Omega$.

c) On résout $\frac{1,8}{S} = 0,3$: $0,3S = 1,8$, donc $S = 6 \, \text{mm}^2$.

- On retrouve la réponse de b), ce qui est cohérent.
- Lecture technique : tripler la section divise la résistance par 3. C'est pourquoi on augmente la section des câbles pour limiter les pertes.

Réponse. a) $k = 1,8$ · b) $R = 0,3 \, \Omega$ · c) $S = 6 \, \text{mm}^2$.

Correction de l'exercice 12 - Un polynôme et une fonction inverse

a) On dérive terme à terme : la dérivée de x^2 est $2x$ et celle de $\frac{16}{x}$ est $-\frac{16}{x^2}$. Au même dénominateur :

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$$

b) Le dénominateur x^2 est positif, donc $f'(x)$ a le signe de $2x^3 - 16 = 2(x^3 - 8)$. Sur $]0; +\infty[$, $x^3 - 8$ est négatif pour $x < 2$ (car $2^3 = 8$ et $x \mapsto x^3$ est croissante), nul en 2, positif ensuite.

x	0 ... 2	2	2 ... +∞
signe de f'	−	0	+
variation de f	décroît	12	croît

c) Le minimum vaut $f(2) = 4 + \frac{16}{2} = 12$. **Contrôle** : $f(1) = 17$ et $f(4) = 20$.

Réponse. a) $f(x) = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$ · b) décroissante sur $]0; 2]$, croissante sur $[2; +\infty[$ · c) minimum 12 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 13 - Tangente à une hyperbole

a) La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Ici $f(3) = \frac{6}{3} = 2$ et, avec $f'(x) = -\frac{6}{x^2}$, $f'(3) = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$. Donc

$$y = 2 - \frac{2}{3}(x - 3) = -\frac{2}{3}x + 4$$

b) Pour $x = 0$, $y = 4$: T coupe l'axe des ordonnées en $(0; 4)$. Pour $y = 0$, $-\frac{2}{3}x + 4 = 0$ donne $x = 6$: T coupe l'axe des abscisses en $(6; 0)$.

Le point de contact $(3; 2)$ est exactement le milieu de ces deux points : c'est une propriété des tangentes à une hyperbole $y = \frac{k}{x}$.

Réponse. a) $y = -\frac{2}{3}x + 4$ · b) (0 ; 4) et (6 ; 0).

Correction de l'exercice 14 - Position par rapport à une asymptote

a) $g(1) = 5$, $g(10) = 2,3$, $g(100) = 2,03$ et $g(-100) = 1,97$.

b) Quand x devient très grand, ou très grand en valeur négative, $\frac{3}{x}$ se rapproche de 0, donc $g(x)$ se rapproche de 2 : la droite $y = 2$ est une **asymptote horizontale** de la courbe.

c) On étudie le signe de l'écart entre la courbe et la droite :

$$g(x) - 2 = \frac{3}{x}$$

Pour $x > 0$, cet écart est positif : la courbe est **au-dessus** de la droite (par exemple $g(100) = 2,03$). Pour $x < 0$, il est négatif : la courbe est **au-dessous** ($g(-100) = 1,97$).

Réponse. a) 5 ; 2,3 ; 2,03 ; 1,97 · b) vers 2 · c) au-dessus pour $x > 0$, au-dessous pour $x < 0$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude complète

a) $f(x) = 0 + 8 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{8}{x^2}$.

— La dérivée est strictement négative sur $]0 ; +\infty[$: f est **décroissante**.

b) On calcule les images :

x	1	2	4	8	16
$f(x)$	10	6	4	3	2,5

c) Le terme $\frac{8}{x}$ se rapproche de 0 : $f(x)$ se rapproche de 2 (asymptote horizontale d'équation $y = 2$), toujours par valeurs supérieures.

— Équation : $2 + \frac{8}{x} = 3$ donne $\frac{8}{x} = 1$, donc $x = 8$.

— Cohérent avec le tableau, où $f(8) = 3$.

Réponse. a) $f(x) = -\frac{8}{x^2} < 0$, décroissante · b) 10 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2,5 · c) vers 2 ; $x = 8$.