

## Plaquette 5 - Problèmes techniques avec la fonction inverse

### Fonction inverse — Terminale STI2D

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Les trois formes rencontrées.

| Forme              | Situation type                         | Comportement                |
|--------------------|----------------------------------------|-----------------------------|
| $\frac{k}{x}$      | grandeurs inversement proportionnelles | décroissante, tend vers 0   |
| $ax + \frac{b}{x}$ | coût, temps de cycle, consommation     | minimum en $\sqrt{b/a}$     |
| $\frac{k}{x} + c$  | coût unitaire avec part variable       | décroissante, tend vers $c$ |

##### Résistances en parallèle.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{donc} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

— La résistance équivalente est **plus petite** que chacune des deux.

— Pour  $n$  résistances **identiques**  $R_0$  :  $R = \frac{R_0}{n}$ .

##### Loi d'Ohm et puissance.

$$I = \frac{U}{R} \quad P = \frac{U^2}{R} = RI^2$$

##### Résistance d'un conducteur.

$$R = \frac{\rho L}{S}$$

À longueur fixée,  $R$  et  $S$  sont inversement proportionnelles.

##### Méthode générale.

1. Identifier la grandeur constante (produit constant) ou la fonction à optimiser. 2. Écrire la relation avec **une seule** variable. 3. Substituer, ou dériver puis annuler. 4. Vérifier l'ordre de grandeur physique du résultat.

△ Une résistance équivalente supérieure à la plus petite des deux, un débit total inférieur à celui d'une pompe seule, un coût unitaire sous le coût variable : autant de résultats impossibles qui signalent une erreur.

#### Correction de l'exercice 1 - Deux résistances en parallèle

En parallèle, ce sont les **inverses** des résistances qui s'ajoutent :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{120} + \frac{1}{80} = \frac{2}{240} + \frac{3}{240} = \frac{5}{240}$$

donc  $R = \frac{240}{5} = 48 \, \Omega$ . On retrouve la formule  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{9600}{200} = 48 \, \Omega$ .

**Contrôle** : la résistance équivalente est plus petite que chacune des deux, ce qui est normal puisque le courant dispose de deux chemins. Réponse : 48  $\Omega$ .

**Réponse.** 48  $\Omega$ .

## Correction de l'exercice 2 - Cinq résistances identiques

Pour 5 résistances identiques en parallèle, on additionne cinq fois le même inverse :

$$\frac{1}{R} = 5 \times \frac{1}{250} = \frac{5}{250} = \frac{1}{50} \quad \text{donc} \quad R = 50 \, \Omega$$

Plus généralement,  $n$  résistances identiques  $R_0$  en parallèle valent  $\frac{R_0}{n}$  : la résistance équivalente est inversement proportionnelle au nombre de branches. Avec dix branches, elle tomberait à  $25 \, \Omega$ , et sous  $230 \, \text{V}$  le courant passerait de  $4,6 \, \text{A}$  à  $9,2 \, \text{A}$ . Réponse :  $50 \, \Omega$ .

**Réponse.**  $50 \, \Omega$ .

## Correction de l'exercice 3 - Retrouver une résistance

On écrit la relation des inverses et on isole l'inconnue :

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{60} + \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{24} - \frac{1}{60} = \frac{5}{120} - \frac{2}{120} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$$

donc  $R = 40 \, \Omega$ .

**Vérification** :  $\frac{60 \times 40}{60 + 40} = \frac{2400}{100} = 24 \, \Omega$ . Et l'ensemble ( $24 \, \Omega$ ) est bien plus petit que chacune des deux résistances. Réponse :  $40 \, \Omega$ .

**Réponse.**  $40 \, \Omega$ .

## Correction de l'exercice 4 - Puissance et résistance

Sous tension fixée, la puissance dissipée vaut  $P = \frac{U^2}{R}$ , avec  $U^2 = 230^2 = 52\,900$  :

$$P_{50} = \frac{52\,900}{50} = 1\,058 \, \text{W} \quad P_{25} = \frac{52\,900}{25} = 2\,116 \, \text{W}$$

À tension fixée, puissance et résistance sont inversement proportionnelles (leur produit vaut toujours  $52\,900$ ) : diviser la résistance par deux double la puissance. Le courant passe de  $\frac{230}{50} = 4,6 \, \text{A}$  à  $9,2 \, \text{A}$  ; une résistance trop faible peut faire disjoncter l'installation.

**Réponse.**  $1\,058 \, \text{W}$  puis  $2\,116 \, \text{W}$ .

## Correction de l'exercice 5 - Choisir une section de câble

D'après  $R = \frac{\rho L}{S}$ , à matériau et longueur fixés, le produit  $R \times S$  est constant :

$0,72 \times 1,5 = 1,08$ . Pour obtenir  $0,30 \, \Omega$  :

$$S = \frac{1,08}{0,30} = 3,6 \, \text{mm}^2$$

Cette section n'existe pas dans le commerce : on prend la section normalisée immédiatement supérieure,  $4 \, \text{mm}^2$ , qui donne  $R = \frac{1,08}{4} = 0,27 \, \Omega$ , sous la limite. La section est multipliée par environ  $2,67$  par rapport au câble de départ, et les pertes à courant égal sont divisées d'autant. Réponse :  $4 \, \text{mm}^2$ .

**Réponse.**  $3,6 \, \text{mm}^2$ , soit une section normalisée de  $4 \, \text{mm}^2$ .

## Correction de l'exercice 6 - Chute de tension

a) D'après la loi d'Ohm, la chute de tension dans le câble vaut  $\Delta U = R \times I$ . Elle ne doit pas dépasser  $6 \, \text{V}$  sous  $20 \, \text{A}$ , donc

$$R \leq \frac{6}{20} = 0,30 \, \Omega$$

b) Comme  $R \times S = 1,08$ , on a  $S = \frac{1,08}{R}$  : la section minimale vaut  $\frac{1,08}{0,30} = 3,6 \, \text{mm}^2$ , soit 4  $\text{mm}^2$  en section normalisée.

Avec 4  $\text{mm}^2$ ,  $R = 0,27 \, \Omega$  et la chute réelle vaut  $0,27 \times 20 = 5,4 \, \text{V}$ , avec 0,6 V de marge. Les pertes valent  $5,4 \times 20 = 108 \, \text{W}$ , soit 216 kWh sur 2 000 h, environ 39 € par an à 0,18 € le kWh.

**Réponse.** a) 0,30  $\Omega$  · b) 3,6  $\text{mm}^2$ , donc 4  $\text{mm}^2$  en section normalisée.

### Correction de l'exercice 7 - Cadence et durée

a) Le nombre de pièces produites est la cadence multipliée par la durée :  $c \times t = 24\,000$ . Durée et cadence sont inversement proportionnelles :

$$t(c) = \frac{24\,000}{c}$$

b)  $t(200) = 120 \, \text{h}$ ,  $t(400) = 60 \, \text{h}$  et  $t(600) = 40 \, \text{h}$ . Doubler la cadence divise la durée par deux ; la tripler la divise par trois.

En journées de 8 h, cela fait 15, 7,5 et 5 jours. **Contrôle** : dans chaque cas, le produit cadence  $\times$  durée vaut 24 000 pièces.

**Réponse.** a)  $t(c) = \frac{24\,000}{c}$  · b) 120 h, 60 h et 40 h.

### Correction de l'exercice 8 - Un coût qui dépend de la cadence

Le coût total est la durée multipliée par le coût horaire. La durée vaut  $\frac{24\,000}{c}$  heures, donc

$$C(c) = \frac{24\,000}{c} \times (40 + 0,02c) = \frac{960\,000}{c} + \frac{480c}{c} = \frac{960\,000}{c} + 480$$

C'est une fonction inverse augmentée d'une constante : elle est décroissante sur  $]0; +\infty[$  et se rapproche de 480 € sans l'atteindre.

La partie du coût horaire proportionnelle à la cadence ( $0,02c$ ) coûte toujours 480 € au total, quelle que soit la cadence : plus on produit vite, moins on paye longtemps.

Réponse :  $C(c) = \frac{960\,000}{c} + 480$ .

**Réponse.**  $C(c) = \frac{960\,000}{c} + 480$ .

### Correction de l'exercice 9 - Exploiter ce modèle

a) On remplace  $c$  dans le modèle :  $C(300) = \frac{960\,000}{300} + 480 = 3\,200 + 480 = 3\,680 \, \text{€}$  et  $C(800) = 1\,200 + 480 = 1\,680 \, \text{€}$ .

b) On cherche la cadence pour laquelle le coût vaut 2 000 € :

$$\frac{960\,000}{c} + 480 = 2\,000 \Leftrightarrow \frac{960\,000}{c} = 1\,520 \Leftrightarrow c = \frac{960\,000}{1\,520} \approx 631,6$$

La fonction  $C$  étant décroissante, il faut une cadence d'au moins 632 **pièces/h** pour respecter le budget. **Vérification** :  $C(632) \approx 1\,999 \, \text{€}$ , pour une durée d'environ 38 h. Le coût ne descendra jamais sous 480 €.

**Réponse.** a) 3 680 € et 1 680 € · b) environ 632 pièces/h.

### Correction de l'exercice 10 - Un coût avec optimum

On dérive :  $C'(n) = 3 - \frac{1\,200}{n^2}$ . Elle s'annule lorsque  $3n^2 = 1\,200$ , soit  $n^2 = 400$  et  $n = 20$ . Elle est négative avant 20 et positive après : le coût est **minimal** pour 20 lots.

$$C(20) = 3 \times 20 + \frac{1\,200}{20} = 60 + 60 = 120 \text{ €}$$

À l'optimum, les deux parts du coût s'équilibrent à 60 € chacune. **Contrôle** :  $C(10) = 30 + 120 = 150$  € et  $C(40) = 120 + 30 = 150$  €. Réponse : 20 **lots**, pour 120 €.

**Réponse.** 20 lots, pour un coût de 120 €.

### Correction de l'exercice 11 - Deux pompes en parallèle

Faire la moyenne des durées donnerait 7,5 h, plus lent que la seconde pompe seule : c'est absurde. Ce sont les **débîts** qui s'additionnent.

La première pompe vide  $\frac{1}{9}$  du bassin par heure, la seconde  $\frac{1}{6}$ . Ensemble :

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2}{18} + \frac{3}{18} = \frac{5}{18} \text{ de bassin par heure}$$

Il leur faut donc  $\frac{18}{5} = 3,6$  h, soit 3 h 36 min (0,6 h = 36 min). **Contrôle** : c'est plus rapide que chaque pompe seule. C'est le même calcul que pour des résistances en parallèle.

**Réponse.** 3,6 h, soit 3 h 36 min.

### Correction de l'exercice 12 - Une moyenne harmonique

La moyenne arithmétique, 70 km/h, est fausse : on ne roule pas le même **temps** aux deux vitesses. On revient à la définition, vitesse moyenne = distance totale / durée totale.

Pour un trajet de longueur  $d$ , l'aller dure  $\frac{d}{80}$  et le retour  $\frac{d}{60}$ , soit au total

$$d \left( \frac{1}{80} + \frac{1}{60} \right) = d \times \frac{7}{240}. \text{ Donc}$$

$$v_m = \frac{2d}{d \times \frac{7}{240}} = \frac{480}{7} \approx 68,6 \text{ km/h}$$

La vitesse moyenne est inférieure à 70 km/h, car on passe plus de temps à la vitesse la plus lente. Ce type de moyenne, qui passe par les inverses, s'appelle la **moyenne harmonique**.

**Réponse.** Environ 68,6 km/h, et non 70.

### Correction de l'exercice 13 - Un rendement énergétique

On dérive :  $P'(v) = 0,8 - \frac{3\,200}{v^2}$ . Elle s'annule lorsque  $v^2 = \frac{3\,200}{0,8} = 4\,000$ , soit  $v = \sqrt{4\,000} \approx 63,25$  m/s. Elle est négative avant et positive après : la puissance est **minimale** à cette vitesse.

$$P(63,25) \approx 0,8 \times 63,25 + \frac{3\,200}{63,25} \approx 50,6 + 50,6 \approx 101,2 \text{ kW}$$

**Contrôle** :  $P(50) = 40 + 64 = 104$  kW et  $P(80) = 64 + 40 = 104$  kW, tous deux supérieurs. Réponse : environ 63,25 **m/s**, pour environ 101,2 kW.

**Réponse.** Environ 63,25 m/s, pour environ 101,2 kW.

### Correction de l'exercice 14 - Un cas sans optimum

On dérive :  $c'(n) = -\frac{2400}{n^2}$ , qui est strictement négative et ne s'annule jamais. Le coût unitaire est donc **décroissant** sur  $[50; 400]$ , et son minimum est atteint à la borne droite :

$$c(400) = \frac{2400}{400} + 7 = 6 + 7 = 13 \text{ €}$$

Au départ,  $c(50) = 48 + 7 = 55 \text{ €}$ . Ici, aucun terme ne croît avec  $n$  : produire davantage fait toujours baisser le coût unitaire, qui se rapproche de 7 €, le coût variable par pièce. Réponse : 13 €, en  $n = 400$ .

**Réponse.** 13 €, atteint en  $n = 400$  (la fonction est décroissante).

### Correction de l'exercice 15 - Comparer deux structures de coût

L'atelier A est plus économique lorsque son coût unitaire est inférieur à celui de B. On regroupe les termes en  $\frac{1}{n}$  d'un côté :

$$\frac{3000}{n} + 5 < \frac{1200}{n} + 9 \Leftrightarrow \frac{1800}{n} < 4$$

Comme  $n > 0$ , on multiplie par  $n$  sans changer le sens :  $1800 < 4n$ , soit  $n > 450$ . L'atelier A devient plus économique à partir de 451 **pièces**.

**Contrôle** : pour 450 pièces, les deux coûts valent 11,67 € ; pour 1 000 pièces, A coûte 8 € et B 10,20 €. A a plus de frais fixes mais un coût variable plus bas : il convient aux grandes séries.

**Réponse.** À partir de 451 pièces.

### Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dimensionner une ligne d'alimentation

a) En admettant  $P = U \times I$ , le courant vaut  $I = \frac{P}{U} = \frac{12000}{400} = 30 \text{ A}$ .

b) La chute admissible vaut  $0,03 \times 400 = 12 \text{ V}$ . D'après la loi d'Ohm,  $R = \frac{\Delta U}{I}$ , donc la résistance du câble ne doit pas dépasser  $\frac{12}{30} = 0,40 \Omega$ .

c) Comme  $R \times S = 1,44$ , la section minimale vaut  $S = \frac{1,44}{0,40} = 3,6 \text{ mm}^2$ . La plus petite section normalisée qui convient est 6 **mm**<sup>2</sup>, qui donne  $R = 0,24 \Omega$  et une chute de 7,2 V, soit 1,8 %.

d) Les pertes par effet Joule valent

$$P_J = RI^2 = 0,24 \times 30^2 = 216 \text{ W}$$

soit  $0,216 \times 1800 = 388,8 \text{ kWh}$  par an et environ  $388,8 \times 0,18 \approx 70 \text{ €}$ . Avec 10 mm<sup>2</sup>, les pertes tomberaient à 129,6 W, environ 42 € par an : l'économie de 28 € par an amortirait un surcoût d'environ 200 € en sept ans. Le 6 mm<sup>2</sup> suffit ; le 10 mm<sup>2</sup> se justifie si la ligne fonctionne davantage.

**Réponse.** a) 30 A · b) 0,40 Ω · c) 3,6 mm<sup>2</sup>, donc 6 mm<sup>2</sup> · d) 216 W de pertes, soit environ 70 € par an.