

Plaquette 4 - Dériver et optimiser un quotient

Fonction inverse — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Dès qu'une grandeur mêle un terme qui croît et un terme en $\frac{k}{x}$ qui décroît, il existe un **optimum**. C'est la structure du coût unitaire, du temps de cycle, de la consommation — et elle se traite toujours de la même façon.

Exercice 1 - Deux dérivées simples

Dériver $f(x) = \frac{8}{x}$ et $g(x) = \frac{5}{x} + 2x$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 2 - Un quotient à dériver

Dériver $f(x) = \frac{3x+1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, de deux façons.

Exercice 3 - Un quotient plus complexe

Dériver $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et déterminer son minimum.

Exercice 4 - Appliquer la formule de l'optimum

Déterminer le minimum de $f(x) = 5x + \frac{45}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 5 - Un coût unitaire

Le coût de production vaut $C(x) = 0,25x^2 + 8x + 400$ euros pour x pièces.

- Exprimer le coût unitaire $c(x)$.
- Déterminer la production qui le minimise.

Exercice 6 - Une consommation à optimiser

La consommation d'un véhicule suit $c(v) = 0,0025v^2 + \frac{900}{v}$ litres aux 100 km, v en km/h.

Déterminer la vitesse la plus économique.

Exercice 7 - Un temps de cycle

La durée d'un cycle vaut $T(n) = 4n + \frac{256}{n}$ minutes, où n est le nombre de lots.

Déterminer le nombre optimal de lots.

Exercice 8 - Une surface minimale

Un rectangle a une aire de 144 m^2 .

- Exprimer son périmètre en fonction de la longueur x .
- Déterminer le périmètre minimal.

Exercice 9 - Un bidon cylindrique

Un bidon cylindrique fermé de volume 2 L ($2\,000 \text{ cm}^3$) a une surface $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{4\,000}{r} \text{ cm}^2$.

Déterminer le rayon qui minimise la surface.

Exercice 10 - Étudier le signe d'une dérivée

Soit $f(x) = 3x + \frac{75}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Dresser le tableau de signes de f' et le tableau de variations.

Exercice 11 - Un maximum, pas un minimum

Soit $f(x) = -2x - \frac{50}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Déterminer son extremum et sa nature.

Exercice 12 - Un optimum hors intervalle

Soit $f(x) = 2x + \frac{200}{x}$ sur $[1; 6]$.

Déterminer le minimum sur cet intervalle.

Exercice 13 - Comparer deux formes

Montrer que $f(x) = \frac{2x^2 + 18}{x}$ et $g(x) = 2x + \frac{18}{x}$ sont égales sur $]0; +\infty[$, puis donner leur minimum.

Exercice 14 - Retrouver un coefficient

La fonction $f(x) = 3x + \frac{b}{x}$ a son minimum en $x = 4$.

Déterminer b et la valeur du minimum.

Exercice 15 - Une fonction à deux termes inverses

Soit $f(x) = \frac{12}{x} + \frac{3}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.

Étudier ses variations.

Exercice 16 – Synthèse : optimiser une série de production

Le coût total d'une série de x pièces vaut $C(x) = 0,5x^2 + 12x + 1\,800$ euros.

- a) Exprimer le coût unitaire $c(x)$ et calculer $c(30)$ et $c(80)$.
- b) Déterminer la taille de série qui minimise le coût unitaire.
- c) Calculer le coût unitaire minimal et le coût total correspondant.
- d) Chaque pièce est vendue 60 €. Déterminer la taille de série qui maximise le bénéfice, et comparer.