

Plaquette 1 - Hyperbole, variations et grandeurs inversement proportionnelles

Fonction inverse — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

On étudie $x \mapsto \frac{1}{x}$ et les fonctions du type $\frac{k}{x}$: domaine, variations, courbe (hyperbole), comportement aux bornes. On applique ensuite aux grandeurs **inversement proportionnelles** de la filière : loi d'Ohm, débit et durée, coût moyen, résistance et section.

Exercice 1 - Domaine et calculs d'images

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$.

- Quel est son domaine de définition ?
- Calculer $f(4)$, $f(0,25)$, $f(-2)$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 2 - Sens de variation

- Donner le sens de variation de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur chaque intervalle de son domaine.
- Comparer $f(2)$ et $f(5)$, puis $f(-4)$ et $f(-1)$.
- Peut-on dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}$ privé de 0 ?

Exercice 3 - Comportement aux bornes

Compléter le tableau de valeurs de $f(x) = \frac{1}{x}$, puis décrire ce qui se passe quand x se rapproche de 0 et quand x devient très grand.

x	0,01	0,1	1	10	100
$f(x)$	?	?	?	?	?

Exercice 4 - Fonction du type k/x

Soit $g(x) = \frac{12}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- Calculer $g(2)$, $g(4)$ et $g(12)$.
- Donner le sens de variation.
- Vérifier que le produit $x \times g(x)$ est constant.

Exercice 5 - Coefficient négatif

Soit $h(x) = \frac{-6}{x}$.

- Calculer $h(2)$ et $h(3)$.
- Quel est le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$? Justifier.

Exercice 6 - Résoudre une équation

Résoudre : a) $\frac{1}{x} = 0,2$ · b) $\frac{15}{x} = 6$ · c) $\frac{1}{x} = 0$.

Exercice 7 - Dériver un quotient

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{3x+1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, de deux façons.

Exercice 8 - Loi d'Ohm

Sous une tension constante $U = 24$ V, l'intensité est $I = \frac{U}{R} = \frac{24}{R}$ (en ampères, R en ohms).

- a) Calculer I pour $R = 12 \Omega$, $R = 48 \Omega$ et $R = 200 \Omega$.
- b) Comment varie I quand R augmente ?
- c) Peut-on atteindre $I = 0$?

Exercice 9 - Débit et durée

Une cuve de 600 litres est remplie à un débit d (en L/min). La durée de remplissage est $t = \frac{600}{d}$ (en minutes).

- a) Calculer t pour $d = 10$, $d = 25$ et $d = 60$ L/min.
- b) Quel débit permet un remplissage en 8 minutes ?
- c) Vérifier que d et t sont inversement proportionnels.

Exercice 10 - Coût moyen

Une série de production a un coût fixe de 9 000 € plus 14 € par pièce. Pour q pièces, le coût moyen est

$$C_M(q) = 14 + \frac{9\,000}{q}$$

- a) Calculer $C_M(100)$, $C_M(500)$ et $C_M(3\,000)$.
- b) Vers quelle valeur le coût moyen se rapproche-t-il quand q devient très grand ?
- c) À partir de quelle quantité le coût moyen descend-il sous 20 € ?

Exercice 11 - Résistance et section d'un conducteur

La résistance d'un fil de longueur fixée est $R = \frac{k}{S}$, où S est la section (en mm²). On mesure $R = 0,9 \Omega$ pour $S = 2$ mm².

- a) Déterminer k .
- b) Calculer R pour $S = 6$ mm².
- c) Quelle section faut-il pour obtenir $R = 0,3 \Omega$?

Exercice 12 - Un polynôme et une fonction inverse

Soit $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Calculer $f'(x)$ et l'écrire sous la forme d'un seul quotient.

- b) Étudier le signe de $f(x)$ et dresser le tableau de variations de f .
- c) En déduire la valeur minimale de f .

Exercice 13 - Tangente à une hyperbole

Soit $f(x) = \frac{6}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 3.
- b) Calculer les coordonnées des points où T coupe les axes.

Exercice 14 - Position par rapport à une asymptote

Soit $g(x) = 2 + \frac{3}{x}$, définie pour $x \neq 0$.

- a) Calculer $g(1)$, $g(10)$, $g(100)$ et $g(-100)$.
- b) Vers quelle valeur $g(x)$ se rapproche-t-il quand x devient très grand, ou très grand en valeur négative ?
- c) Selon le signe de x , la courbe est-elle au-dessus ou au-dessous de la droite d'équation $y = 2$?

Exercice 15 - Synthèse : étude complète

Soit $f(x) = 2 + \frac{8}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- a) Calculer $f(x)$ et en déduire le sens de variation.
- b) Compléter un tableau de valeurs pour $x = 1, 2, 4, 8, 16$.
- c) Vers quelle valeur $f(x)$ se rapproche-t-il quand x devient très grand ? Résoudre $f(x) = 3$.