

MATHÉMATIQUES

Fonction inverse

Terminale STI2D

Fonction inverse • Hyperbole • Comportement aux bornes • Asymptotes
Dérivée $-\frac{1}{x^2}$ • Sens de variation • Coût moyen • Optimisation

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe terminale** (arrêté du 26 février 2026, applicable à la rentrée 2027 ; la partie « Analyse » reprend celle du programme de 2019), partie « Analyse », section « Fonction inverse ». Il couvre :

- comportement de $x \mapsto \frac{1}{x}$ aux bornes de son ensemble de définition, en lien avec les ordres de grandeur ;
- dérivée (à partir du taux de variation) et sens de variation ; courbe représentative et asymptotes (approche intuitive) ;
- étude de fonctions obtenues par combinaison linéaire de $\frac{1}{x}$ et de polynômes de degré au plus 3 : prix unitaire, coût moyen.

Objectif : connaître la fonction inverse (comportement aux bornes, dérivée, variations, courbe) et étudier des fonctions combinant $\frac{1}{x}$ et des polynômes de degré au plus 3.

Table des matières

1	Comportement aux bornes	3
2	Dérivée et variations	3
3	Combinaisons avec des polynômes	4
4	Erreurs classiques	4
5	Fiche de synthèse	5
6	Exercices d'application	5
7	Corrigés des exercices	5

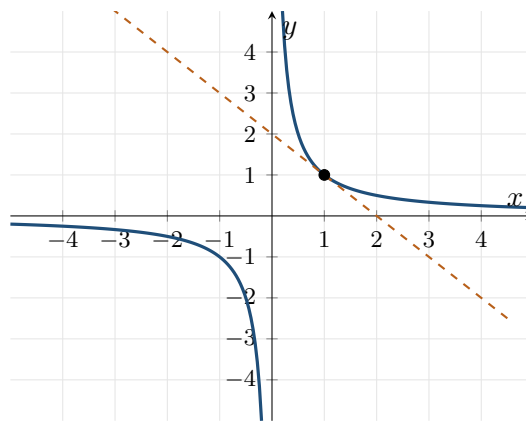
1. Comportement aux bornes

Fonction inverse

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ (on ne divise pas par 0).

Ordres de grandeur

- L'inverse d'un très grand nombre est très proche de 0 : $\frac{1}{10^6} = 10^{-6}$. Quand x devient très grand (positif ou négatif), $\frac{1}{x}$ se rapproche de 0.
- L'inverse d'un nombre positif très proche de 0 est très grand : $\frac{1}{0,001} = 1000$. Quand x se rapproche de 0 par valeurs positives, $\frac{1}{x}$ devient aussi grand que l'on veut ; par valeurs négatives, il devient négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue.



L'hyperbole $y = \frac{1}{x}$: les axes sont ses asymptotes. En pointillés, la tangente au point $(1; 1)$, de coefficient directeur -1 .

Asymptotes

La courbe se rapproche autant qu'on veut de l'axe des abscisses quand x devient très grand, et de l'axe des ordonnées quand x se rapproche de 0 : ces droites sont des **asymptotes** de la courbe.

2. Dérivée et variations

Dérivée de la fonction inverse

Pour $a \neq 0$ et h petit, le taux de variation vaut

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a - (a+h)}{h a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)},$$

qui se rapproche de $-\frac{1}{a^2}$ quand h se rapproche de 0. Ainsi

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Sens de variation

$-\frac{1}{x^2} < 0$: la fonction inverse est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R}^*$ tout entier : $-1 < 1$ et pourtant $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$).

3. Combinaisons avec des polynômes**Étudier $f(x) = P(x) + \frac{k}{x}$**

On dérive ($P'(x) - \frac{k}{x^2}$), on réduit au même dénominateur x^2 (positif), on étudie le signe du numérateur, puis on dresse le tableau de variations.

Coût moyen

Le coût de production de q unités est $C(q) = q^2 + 10q + 400$ (en euros), pour $q \in [1 ; 50]$. Le **coût moyen** est

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = q + 10 + \frac{400}{q}, \quad C'_M(q) = 1 - \frac{400}{q^2} = \frac{q^2 - 400}{q^2} = \frac{(q - 20)(q + 20)}{q^2}.$$

Sur $[1 ; 50]$, $C'_M(q)$ a le signe de $q - 20$.

q	1	20	50
$C'_M(q)$	−	0	+
$C_M(q)$	411	50	68

Le coût moyen est minimal pour 20 unités : 50 € par unité.

Prix unitaire

Des frais fixes de 1 200 € sont répartis sur x pièces : la part par pièce, $\frac{1200}{x}$, diminue quand x augmente, mais ne s'annule jamais.

4. Erreurs classiques**À éviter**

- Oublier que 0 n'a pas d'image.
- Dire que la fonction inverse est décroissante « sur $\mathbb{R}^*$ » : c'est vrai sur chacun des deux intervalles séparément.
- Écrire $(\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2}$ (oubli du signe).
- Oublier de réduire au même dénominateur avant d'étudier le signe de la dérivée.

5. Fiche de synthèse

Définition	$\frac{1}{x}$ sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$
Bornes	proche de 0 quand x est très grand ; très grand quand x est proche de 0
Asymptotes	les deux axes
Dérivée	$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$; décroissante sur chaque intervalle
Coût moyen	$C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$; dériver, réduire au dénominateur q^2

6. Exercices d'application

Exercice 1 – Dérivée

Dériver $g(x) = 3x^2 - \frac{5}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 2 – Variations

Étudier les variations de $f(x) = x + \frac{9}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$ et donner son minimum.

Exercice 3 – Coût moyen

$C(q) = 0,5q^2 + 2q + 50$ pour $q \in [1 ; 30]$. Exprimer le coût moyen $C_M(q)$ et déterminer la production qui le rend minimal.

Exercice 4 – Ordres de grandeur

Donner $\frac{1}{0,0002}$ et $\frac{1}{2 \times 10^5}$ en écriture scientifique.

7. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $g'(x) = 6x + \frac{5}{x^2}$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$, du signe de $x-3$: f décroît sur $]0 ; 3]$, croît sur $[3 ; +\infty[$; minimum $f(3) = 6$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $C_M(q) = 0,5q + 2 + \frac{50}{q}$; $C'_M(q) = 0,5 - \frac{50}{q^2} = \frac{0,5(q^2 - 100)}{q^2}$, du signe de $q - 10$.
Minimum pour $q = 10$: $C_M(10) = 5 + 2 + 5 = 12$ €.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $\frac{1}{2 \times 10^{-4}} = 0,5 \times 10^4 = 5 \times 10^3$; $\frac{1}{2 \times 10^5} = 0,5 \times 10^{-5} = 5 \times 10^{-6}$.