

Plaquette 4 - Échelles logarithmiques : décibels et pH

Fonction logarithme décimal — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Niveau sonore en décibels.

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad \text{avec} \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

- L est en décibels (dB), I l'intensité acoustique en W/m^2 .
- **Relation inverse** : $I = I_0 \times 10^{\frac{L}{10}}$.

Situation	$I \text{ (W/m}^2\text{)}$	$L \text{ (dB)}$
seuil d'audition	10^{-12}	0
conversation	10^{-6}	60
trafic dense	10^{-4}	80
seuil de douleur	1	120

La règle des doublements.

- **Doubler** l'intensité ajoute environ 3 dB ($10 \log 2 \approx 3,01$).
- **Multiplier par 10** ajoute exactement 10 dB.
- n sources identiques ajoutent $10 \log n$ dB.

Échelle de pH.

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+] \quad \text{donc} \quad [\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}}$$

- Une baisse d'**une unité** de pH multiplie l'acidité par 10.
- $\text{pH} < 7$: acide · $\text{pH} = 7$: neutre · $\text{pH} > 7$: basique.

Autres échelles logarithmiques : magnitude d'un séisme, gain d'un amplificateur en dB, atténuation d'une fibre en dB/km.

⚠ Sur une échelle logarithmique, on n'**additionne jamais** les valeurs : deux sources de 60 dB ne font pas 120 dB mais environ 63 dB.

Correction de l'exercice 1 - Du niveau à l'intensité

Le niveau sonore vaut $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Pour retrouver l'intensité, on inverse la relation : $\frac{L}{10} = \log \frac{I}{I_0}$, donc $I = I_0 \times 10^{\frac{L}{10}}$. Avec $L = 70$:

$$I = 10^{-12} \times 10^7 = 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

Contrôle : 70 dB est compris entre une conversation (60 dB, soit 10^{-6} W/m^2) et un trafic dense (80 dB, soit 10^{-4} W/m^2), et l'intensité trouvée aussi. Réponse : $I = 10^{-5} \text{ W/m}^2$.

Réponse. $I = 10^{-5} \text{ W/m}^2$.

Correction de l'exercice 2 - De l'intensité au niveau

On applique la définition du niveau sonore. Le rapport à l'intensité de référence vaut

$$\frac{I}{I_0} = \frac{4 \times 10^{-6}}{10^{-12}} = 4 \times 10^6$$

Son logarithme vaut $\log 4 + \log 10^6 \approx 0,602 + 6 = 6,602$, donc $L = 10 \times 6,602 \approx 66$ dB.

Contrôle : l'intensité est comprise entre 10^{-6} et 10^{-5} W/m², donc le niveau est compris entre 60 et 70 dB, un peu au-dessus d'une conversation. Réponse : environ 66 **dB**.

Réponse. Environ 66 dB.

Correction de l'exercice 3 - Doubler l'intensité

Les décibels ne s'additionnent pas : ce sont les **intensités** qui s'ajoutent. Deux machines identiques produisent une intensité double, $2I$. Le niveau devient

$$10 \log \left(\frac{2I}{I_0} \right) = 10 \log 2 + 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \approx 3,01 + 82$$

Le niveau total vaut environ 85 **dB**. Additionner les décibels donnerait 164 dB, bien au-delà du seuil de douleur, ce qui est absurde.

À retenir : doubler l'intensité ajoute 3 dB. Avec quatre machines, on ajouterait 6 dB (88 dB) ; avec dix, 10 dB (92 dB).

Réponse. Environ 85 dB (et non 164).

Correction de l'exercice 4 - Plusieurs sources

Huit machines identiques produisent une intensité 8 fois plus grande. Comme $\log(8I) = \log 8 + \log I$, le niveau augmente de $10 \log 8$:

$$10 \log 8 \approx 10 \times 0,903 \approx 9,03 \text{ dB}$$

Le niveau global vaut donc $75 + 9,03 \approx 84$ dB.

Contrôle : $8 = 2^3$, et chaque doublement ajoute 3 dB, soit $75 + 3 \times 3 = 84$ dB. L'atelier est tout juste sous le seuil réglementaire de 85 dB, au-delà duquel la protection auditive est obligatoire. Réponse : environ 84 **dB**.

Réponse. Environ 84 dB.

Correction de l'exercice 5 - Combien de machines ?

Avec n machines identiques, le niveau vaut $75 + 10 \log n$. On ne doit pas dépasser 88 dB, soit une marge de 13 dB :

$$10 \log n \leq 13 \Leftrightarrow \log n \leq 1,3 \Leftrightarrow n \leq 10^{1,3} \approx 19,95$$

On peut repasser à la puissance de 10 en gardant le sens, car $x \mapsto 10^x$ est croissante. Le plus grand entier possible est $n = 19$.

Vérification : 19 machines donnent $75 + 10 \log 19 \approx 87,8$ dB, et 20 machines environ 88,01 dB, juste au-dessus. Réponse : 19 **machines**.

Réponse. 19 machines.

Correction de l'exercice 6 - Une réduction de bruit

L'intensité est multipliée par 0,25. Comme $\log(0,25I) = \log 0,25 + \log I$, le niveau varie de

$$10 \log 0,25 \approx 10 \times (-0,602) \approx -6,02 \text{ dB}$$

Le capot fait baisser le niveau d'environ **6 dB** : une machine de 90 dB tombe à 84 dB.

Contrôle : diviser l'intensité par 4, c'est la diviser deux fois par 2, soit deux fois -3 dB. Pour l'oreille, une baisse de 10 dB est perçue comme « deux fois moins fort » : 6 dB, c'est une baisse nette mais pas spectaculaire.

Réponse. Une baisse d'environ 6 dB.

Correction de l'exercice 7 - Deux sources différentes

On ne peut pas additionner les décibels : on repasse aux intensités, on les additionne, puis on revient aux décibels.

— **Intensités.** $I_1 = 10^{-12} \times 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-4} \text{ W/m}^2$ et $I_2 = 10^{-12} \times 10^{7,4} \approx 2,512 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$.

— **Somme.** $I_1 + I_2 \approx 1,2512 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$.

— **Niveau total.** Le rapport à I_0 vaut $1,2512 \times 10^8$, d'où

$$L = 10 \log (1,2512 \times 10^8) \approx 10 \times 8,097 \approx 81 \text{ dB}$$

La machine la plus bruyante impose presque tout le niveau : arrêter la seconde ne fait gagner qu'un décibel. Pour réduire le bruit, on agit d'abord sur la source la plus forte. Réponse : environ **81 dB**.

Réponse. Environ 81 dB.

Correction de l'exercice 8 - Un gain d'amplificateur

Le gain en décibels vaut $G = 10 \log \left(\frac{P_s}{P_e} \right)$. On l'inverse comme pour le niveau sonore :

$$\log \frac{P_s}{P_e} = \frac{G}{10} = 1,8, \text{ donc}$$

$$\frac{P_s}{P_e} = 10^{1,8} \approx 63,1$$

L'amplificateur multiplie la puissance par environ 63.

Contrôle : $18 = 10 + 3 + 3 + 2$ dB correspond à des facteurs 10, 2, 2 et environ 1,58, dont le produit vaut environ 63. De même, 20 dB correspond à un facteur 100 et 30 dB à un facteur 1 000.

Réponse. Par environ 63.

Correction de l'exercice 9 - Atténuation en dB

Les atténuations exprimées en décibels **s'additionnent** le long d'une liaison : sur 40 km, l'atténuation totale vaut $0,3 \times 40 = 12$ dB.

Une atténuation de 12 dB signifie $10 \log \frac{P_s}{P_e} = -12$, donc

$$\frac{P_s}{P_e} = 10^{-1,2} \approx 0,0631$$

Il reste environ 6,3 % de la puissance. **Contrôle** : -10 dB correspond à 10 %, donc -12 dB à un peu moins. Le décibel transforme la multiplication par un même coefficient à chaque kilomètre en une simple addition.

Réponse. 12 dB d'atténuation, soit environ 6,3 % de la puissance restante.

Correction de l'exercice 10 - Un premier pH

Le pH est défini par $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$. Avec $[\text{H}^+] = 10^{-4} \text{ mol/L}$:

$$\text{pH} = -\log(10^{-4}) = -(-4) = 4$$

Le pH est inférieur à 7 : la solution est **acide**, à peu près comme le vin.

Contrôle : plus la concentration en ions hydrogène est grande, plus le pH est petit ; une concentration de 10^{-7} mol/L donnerait un pH neutre de 7. Réponse : **pH** = 4, solution acide.

Réponse. pH = 4, solution acide.

Correction de l'exercice 11 - Du pH à la concentration

On inverse la définition du pH : $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ donne $\log[\text{H}^+] = -\text{pH}$, donc

$$[\text{H}^+] = 10^{-2,5} \approx 3,16 \times 10^{-3} \text{ mol/L}$$

soit environ 0,00316 mol/L.

Contrôle : le pH 2,5 est compris entre 2 et 3, donc la concentration est comprise entre 10^{-3} et 10^{-2} mol/L . C'est une solution fortement acide, proche du jus de citron, environ 31,6 fois plus concentrée qu'une solution de pH 4.

Réponse. Environ $3,16 \times 10^{-3} \text{ mol/L}$.

Correction de l'exercice 12 - Une unité de pH

On calcule les deux concentrations : à pH 5, $[\text{H}^+] = 10^{-5} \text{ mol/L}$; à pH 3, $[\text{H}^+] = 10^{-3} \text{ mol/L}$. Leur rapport vaut

$$\frac{10^{-3}}{10^{-5}} = 10^{-3+5} = 10^2 = 100$$

L'acidité a été multipliée par 100. Chaque unité de pH en moins multiplie la concentration en ions hydrogène par 10 ; ici, deux unités donnent 10^2 .

Une petite variation de pH cache donc un très grand écart de concentration : c'est tout l'intérêt d'une échelle logarithmique.

Réponse. Par 100.

Correction de l'exercice 13 - Diluer une solution

À pH 3, la concentration vaut 10^{-3} mol/L . Diluer 10 fois divise la concentration par 10 : elle devient 10^{-4} mol/L , et le pH vaut donc 4.

Avec les propriétés du logarithme :

$$-\log\left(\frac{10^{-3}}{10}\right) = -\log(10^{-3}) + \log 10 = 3 + 1 = 4$$

Diluer 10 fois augmente le pH d'une unité. Ce modèle a une limite : une dilution extrême rapproche le pH de 7, sans le dépasser. Réponse : **pH** = 4.

Réponse. pH = 4.

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux solutions

On compare les concentrations en ions hydrogène : $10^{-6,2}$ mol/L pour A et $10^{-4,7}$ mol/L pour B. Leur rapport vaut

$$\frac{10^{-4,7}}{10^{-6,2}} = 10^{-4,7+6,2} = 10^{1,5} \approx 31,6$$

La solution B est environ 32 **fois plus acide** que A.

Contrôle : un écart de pH de 1,5 unité correspond à un facteur compris entre $10^1 = 10$ et $10^2 = 100$. Les concentrations valent environ $6,31 \times 10^{-7}$ et 2×10^{-5} mol/L.

Réponse. B est environ 32 fois plus acide que A.

Correction de l'exercice 15 - Une magnitude

On calcule $\log E$ pour chaque magnitude : $\log E_7 = 1,5 \times 7 + 4,8 = 15,3$ et $\log E_5 = 1,5 \times 5 + 4,8 = 12,3$.

La différence des logarithmes est le logarithme du rapport :

$$\log \frac{E_7}{E_5} = \log E_7 - \log E_5 = 3 \quad \text{donc} \quad \frac{E_7}{E_5} = 10^3 = 1\,000$$

Un séisme de magnitude 7 libère **mille fois** plus d'énergie qu'un séisme de magnitude 5. Une seule unité de magnitude correspond à un facteur $10^{1,5} \approx 31,6$. Un séisme de magnitude 7 libère environ $10^{15,3} \approx 2 \times 10^{15}$ J, de l'ordre de 500 kilotonnes de TNT.

Réponse. Un facteur 1 000.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : traiter le bruit d'un atelier

a) Six machines identiques multiplient l'intensité par 6, donc ajoutent $10 \log 6 \approx 7,78$ dB : le niveau des machines seules vaut environ $79 + 7,78 \approx 86,8$ dB.

b) Pour ajouter le compresseur, on repasse aux intensités. Les machines produisent $10^{-12} \times 10^{8,678} \approx 4,765 \times 10^{-4}$ W/m², le compresseur $10^{-12} \times 10^{8,8} \approx 6,310 \times 10^{-4}$ W/m². La somme vaut environ $1,1075 \times 10^{-3}$ W/m², d'où

$$L = 10 \log (1,1075 \times 10^9) \approx 90,4 \text{ dB}$$

c) Le capot divise l'intensité du compresseur par 10, soit environ $6,31 \times 10^{-5}$ W/m² (78 dB). La nouvelle somme vaut environ $5,396 \times 10^{-4}$ W/m², d'où un niveau d'environ $10 \log (5,396 \times 10^8) \approx 87,3$ dB.

d) Avec le capot seul, 87,3 dB dépasse le seuil de 85 dB : ce sont maintenant les six machines, à 86,8 dB, qui dominent. Pour descendre à 85 dB, l'intensité totale ne doit pas dépasser $10^{-12} \times 10^{8,5} \approx 3,16 \times 10^{-4}$ W/m² ; celle des machines doit donc être réduite d'environ 3 dB. Arrêter deux machines ne ferait gagner que $10 \log \frac{4}{6} \approx -1,8$ dB : il faut **capoter le compresseur et traiter les machines**.

Réponse. a) environ 86,8 dB · b) environ 90,4 dB · c) environ 87,3 dB · d) le capot seul ne suffit pas : il faut aussi traiter les machines.