

Plaquette 2 - Lire et manipuler le logarithme décimal

Fonction logarithme décimal — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Pour $x > 0$, $\log x$ est l'exposant à donner à 10 pour obtenir x :

$$\log(10^n) = n \quad \text{et} \quad 10^{\log x} = x$$

Valeurs de référence.

x	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000
$\log x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Les trois propriétés, pour $a > 0$ et $b > 0$:

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad \log(a^n) = n \log a$$

— Conséquence : $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$ et $\log \frac{1}{a} = -\log a$.

— **Un produit devient une somme** : c'est tout l'intérêt du logarithme.

Domaine et signe.

— $\log x$ n'existe que pour $x > 0$.

— $\log x < 0$ pour $0 < x < 1$, $\log x = 0$ pour $x = 1$, $\log x > 0$ pour $x > 1$.

— $\log$ est **strictement croissante** : $a < b \Leftrightarrow \log a < \log b$.

Ordre de grandeur. Pour un nombre écrit $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$, on a $n \leq \log x < n + 1$: la **partie entière** du logarithme donne l'ordre de grandeur.

⚠ $\log(a + b)$ ne se simplifie **pas** : seules les multiplications, divisions et puissances se transforment.

Correction de l'exercice 1 - Valeurs immédiates

Par définition, $\log b$ est l'exposant x tel que $10^x = b$. On écrit donc chaque nombre comme une puissance de 10.

— $1\,000 = 10^3$, donc $\log 1\,000 = 3$.

— $0,01 = 10^{-2}$, donc $\log 0,01 = -2$.

— $1 = 10^0$, donc $\log 1 = 0$.

— $\log 10^7 = 7$, directement.

$$\log(10^n) = n$$

Contrôle du signe : 0,01 est inférieur à 1 et son logarithme est négatif, comme attendu.
Réponses : 3 ; -2 ; 0 ; 7.

Réponse. 3 ; -2 ; 0 ; 7.

Correction de l'exercice 2 - Avec une racine

On écrit chaque racine comme une puissance de 10, puis on lit l'exposant.

— $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$, donc $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2} = 0,5$.

— $\sqrt[3]{100} = 100^{\frac{1}{3}} = (10^2)^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{2}{3}}$, donc

$$\log \sqrt[3]{100} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

Contrôle : $\sqrt[3]{100} \approx 4,64$ est compris entre 1 et 10, donc son logarithme est compris entre 0 et 1. Réponses : 0,5 et $\frac{2}{3}$.

Réponse. 0,5 et $\frac{2}{3} \approx 0,667$.

Correction de l'exercice 3 - Somme de logarithmes

Le logarithme transforme un produit en somme : $\log a + \log b = \log(ab)$. On regroupe donc les deux termes :

$$\log 4 + \log 25 = \log(4 \times 25) = \log 100 = 2$$

Contrôle avec les valeurs approchées : $\log 4 \approx 0,602$ et $\log 25 \approx 1,398$, dont la somme vaut 2.

Il ne faut pas écrire $\log(4 + 25) = \log 29 \approx 1,462$: la propriété porte sur le **produit**, pas sur la somme. Réponse : 2.

Réponse. $\log 100 = 2$.

Correction de l'exercice 4 - Différence de logarithmes

Le logarithme transforme un quotient en différence : $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$.

$$\log 500 - \log 5 = \log \frac{500}{5} = \log 100 = 2$$

De même, $\log 3 - \log 300 = \log \frac{3}{300} = \log 0,01 = -2$. Le quotient est inférieur à 1, d'où un logarithme négatif.

Les deux résultats sont opposés, ce qui est normal :

$$\log 3 - \log 300 = -(\log 300 - \log 3) = -\log 100. \text{ Réponses : } 2 \text{ et } -2.$$

Réponse. 2 et -2.

Correction de l'exercice 5 - Puissance dans un logarithme

On utilise la propriété $\log(a^n) = n \log a$:

$$\log(2^{10}) = 10 \log 2 \approx 10 \times 0,301 = 3,01$$

Contrôle : $2^{10} = 1\,024$ est compris entre 10^3 et 10^4 , donc son logarithme est compris entre 3 et 4 ; il est très proche de 3 car 1 024 est très proche de 1 000. C'est pourquoi, en informatique, 1 024 octets sont souvent assimilés à 1 000. Réponse : $10 \log 2 \approx 3,01$.

Réponse. $10 \log 2 \approx 3,01$.

Correction de l'exercice 6 - Décomposer un logarithme

On décompose 12 en produit de facteurs dont on connaît le logarithme :

$12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$. Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes, et celui d'une puissance se multiplie par l'exposant :

$$\log 12 = \log(2^2) + \log 3 = 2 \log 2 + \log 3$$

Avec les valeurs données : $2 \times 0,301 + 0,477 = 0,602 + 0,477 = 1,079$.

Contrôle : 12 est compris entre 10 et 100, donc $\log 12$ est compris entre 1 et 2.

Réponse : $\log 12 \approx 1,079$.

Réponse. $\log 12 = 2 \log 2 + \log 3 \approx 1,079$.

Correction de l'exercice 7 - Deux logarithmes à comparer

La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: elle conserve l'ordre. Il suffit donc de comparer les nombres eux-mêmes.

— $250 < 260$, donc $\log 250 < \log 260$ (environ 2,398 et 2,415).

— $0,5 < 0,6$, donc $\log 0,5 < \log 0,6$.

$$\log 0,5 \approx -0,301 < \log 0,6 \approx -0,222$$

Les deux derniers logarithmes sont négatifs, car 0,5 et 0,6 sont inférieurs à 1 ; la croissance conserve l'ordre aussi pour ces valeurs. Ne pas croire que $-0,301 > -0,222$ parce que $0,301 > 0,222$.

Réponse. $\log 250 < \log 260$ et $\log 0,5 < \log 0,6$.

Correction de l'exercice 8 - Ordre de grandeur

On écrit chaque nombre en notation scientifique, puis on l'encadre par deux puissances de 10 consécutives ; la fonction $\log$ étant croissante, elle conserve l'encadrement.

— $45\,000 = 4,5 \times 10^4$, donc $10^4 < 45\,000 < 10^5$ et $4 < \log 45\,000 < 5$ (valeur réelle : environ 4,653).

— $0,0032 = 3,2 \times 10^{-3}$, donc

$$10^{-3} < 0,0032 < 10^{-2} \quad \text{et} \quad -3 < \log 0,0032 < -2$$

(valeur réelle : environ -2,495). La partie entière du logarithme donne l'exposant de la notation scientifique.

Réponse. $4 < \log 45\,000 < 5$ et $-3 < \log 0,0032 < -2$.

Correction de l'exercice 9 - Compter des chiffres

On calcule le logarithme du nombre avec la propriété des puissances :

$$\log(2^{64}) = 64 \log 2 \approx 64 \times 0,30103 \approx 19,266$$

Comme $19 < \log(2^{64}) < 20$ et que la fonction $\log$ est croissante, on a $10^{19} < 2^{64} < 10^{20}$.

Or les entiers compris entre 10^{19} et 10^{20} s'écrivent avec 20 chiffres.

Contrôle : $2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$ compte bien 20 chiffres. C'est le nombre de valeurs que peut prendre un entier codé sur 64 bits. Réponse : 20 **chiffres**.

Réponse. 20 chiffres.

Correction de l'exercice 10 - Une expression à simplifier

On regroupe d'abord la somme en un produit, puis on soustrait :

$$\log 8 + \log 125 - \log 10 = \log \frac{8 \times 125}{10} = \log \frac{1\,000}{10} = \log 100 = 2$$

On peut aussi procéder en deux temps : $\log 8 + \log 125 = \log 1\,000 = 3$, puis

$$3 - \log 10 = 3 - 1 = 2.$$

Le calcul est simple parce que $8 \times 125 = 2^3 \times 5^3 = 10^3$. Réponse : 2.

Réponse. 2.

Correction de l'exercice 11 - Avec des puissances

On peut d'abord simplifier les puissances, puis lire le logarithme.

— $10^5 \times 10^{-2} = 10^{5-2} = 10^3$, donc le logarithme vaut 3. Avec les propriétés du logarithme : $\log 10^5 + \log 10^{-2} = 5 - 2 = 3$.

— $\frac{10^7}{10^3} = 10^4$, donc le logarithme vaut 4 ; ou encore $7 - 3 = 4$.

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Le logarithme transforme les produits en sommes : c'est l'idée qui a fait inventer les tables de logarithmes et la règle à calcul. Réponses : 3 et 4.

Réponse. 3 et 4.

Correction de l'exercice 12 - Un piège à éviter

On calcule les deux membres séparément. À gauche, $\log(10 + 90) = \log 100 = 2$. À droite, $\log 10 + \log 90 = 1 + \log 90 \approx 1 + 1,954 = 2,954$.

Comme $2 \neq 2,954$, l'égalité est **fausse**. La propriété du cours porte sur le produit :

$$\log 10 + \log 90 = \log(10 \times 90) = \log 900 \approx 2,954$$

Le logarithme d'une somme ne se décompose jamais : $\log(a + b) \neq \log a + \log b$.

Réponse. Faux : $\log 100 = 2$, alors que $\log 10 + \log 90 \approx 2,954 = \log 900$.

Correction de l'exercice 13 - Résoudre une équation en log

Par définition, $\log x = c$ signifie $x = 10^c$: on « repasse à la puissance de 10 ».

— $\log x = 3$ donne $x = 10^3 = 1\,000$.

— $\log x = -1$ donne $x = 10^{-1} = 0,1$.

Vérification : $\log 1\,000 = 3$ et $\log 0,1 = -1$. Les deux solutions sont bien strictement positives, et chacune est unique, car la fonction $\log$ est strictement croissante. Réponses : $x = 1\,000$ et $x = 0,1$.

Réponse. $x = 1\,000$ et $x = 0,1$.

Correction de l'exercice 14 - Une équation avec propriété

Le logarithme n'est défini que pour $x > 0$. On regroupe la somme en un seul logarithme, puis on repasse à la puissance de 10 :

$$\log x + \log 4 = 2 \Leftrightarrow \log(4x) = 2 \Leftrightarrow 4x = 10^2 = 100 \Leftrightarrow x = 25$$

La solution 25 est bien positive. **Vérification** : $\log 25 + \log 4 = \log 100 = 2$.

On peut aussi écrire $\log x = 2 - \log 4 = \log \frac{100}{4}$, ce qui redonne $x = 25$. Réponse : $x = 25$.

Réponse. $x = 25$.

Correction de l'exercice 15 - Une valeur interdite

Le logarithme n'est défini que pour un nombre strictement positif : il faut $x - 3 > 0$, c'est-à-dire $x > 3$.

$$\log(x - 3) = 1 \Leftrightarrow x - 3 = 10^1 = 10 \Leftrightarrow x = 13$$

La solution 13 vérifie bien $x > 3$, et $\log(13 - 3) = \log 10 = 1$.

Une solution négative est impossible : toute solution doit vérifier $x > 3$, ce qui exclut tous les nombres négatifs. C'est pourquoi on pose toujours la condition d'existence **avant** de résoudre. Réponse : $x = 13$.

Réponse. $x = 13$; le domaine impose $x > 3$, aucune solution négative n'est possible.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : logarithmes et ordres de grandeur

a) On décompose chaque nombre avec 2 et 3. $6 = 2 \times 3$, donc

$\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0,778$. $18 = 2 \times 3^2$, donc

$\log 18 = \log 2 + 2\log 3 \approx 0,301 + 0,954 = 1,255$. Enfin $0,5 = \frac{1}{2}$, donc

$\log 0,5 = -\log 2 \approx -0,301$.

b) $1\,800 = 18 \times 100$, donc

$$\log 1\,800 = \log 18 + \log 100 \approx 1,255 + 2 = 3,255$$

Contrôle : 1 800 est compris entre 10^3 et 10^4 .

c) $\log(3^{50}) = 50\log 3 \approx 23,85$. Comme $23 < 23,85 < 24$, on a $10^{23} < 3^{50} < 10^{24}$: 3^{50}

s'écrit avec 24 **chiffres** (il vaut environ $7,18 \times 10^{23}$).

d) Il faut $2x > 0$, soit $x > 0$. On regroupe : $\log(2x) + \log 5 = \log(10x) = 3$, d'où

$10x = 1\,000$ et $x = 100$, qui est bien positif. **Vérification** :

$$\log 200 + \log 5 = \log 1\,000 = 3.$$

Réponse. a) 0,778 ; 1,255 ; -0,301 · b) environ 3,255 · c) 24 chiffres · d) $x = 100$.