

## Plaquette 5 – Problèmes de synthèse avec le logarithme

### Fonction logarithme décimal – Terminale STI2D

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Reconnaître l'outil à employer.

| L'inconnue est...                   | Outil                       |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| dans l'exposant ( $a^x = k$ )       | $x = \frac{\log k}{\log a}$ |
| la base ( $a^n = k$ , $n$ connu)    | $a = k^{\frac{1}{n}}$       |
| dans un logarithme ( $\log x = c$ ) | $x = 10^c$                  |
| une valeur à calculer               | substitution directe        |

##### Les formules réunies.

$$x = \frac{\log k}{\log a} \quad L = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{pH} = -\log [\text{H}^+]$$

$$\text{doublement} = \frac{\log 2}{\log a} \quad \text{demi-vie} = \frac{\log 0,5}{\log a}$$

##### Trois contrôles systématiques.

1. **Signe** : un logarithme d'argument inférieur à 1 est négatif ; diviser deux négatifs donne un positif. 2. **Domaine** : l'argument d'un logarithme est strictement positif. 3. **Arrondi** : entier supérieur pour un dépassement de seuil, entier inférieur pour une durée maximale.

**Le réflexe décibel.** Les décibels s'**additionnent** le long d'une chaîne (atténuations, gains), mais les **intensités** s'additionnent quand plusieurs sources coexistent.

⚠ Une réponse en années doit toujours être confrontée au bon sens : un modèle exponentiel calé sur trois mesures ne se prolonge pas sur cinquante ans.

#### Correction de l'exercice 1 – Un capital à faire fructifier

Le capital vaut  $22\,000 \times 1,032^x$  après  $x$  années. On cherche quand il atteint 30 000 € : on isole la puissance, puis on passe au logarithme.

$$1,032^x = \frac{30}{22} \Leftrightarrow x = \frac{\log(30/22)}{\log 1,032} \approx \frac{0,134742}{0,013680} \approx 9,85$$

Le capital atteint 30 000 € au bout d'environ 9,85 ans, donc à la fin de la **dixième année** en années entières. **Vérification** :  $22\,000 \times 1,032^{10} \approx 30\,145$  €.

**Réponse.** Environ 9,85 ans, soit 10 années entières.

#### Correction de l'exercice 2 – Un seuil de stock

Le stock vaut  $14\,000 \times 0,935^x$  après  $x$  semaines, puisque baisser de 6,5 % revient à multiplier par 0,935. On résout l'égalité avec 3 000 :

$$0,935^x = \frac{3\,000}{14\,000} \Leftrightarrow x = \frac{\log(3/14)}{\log 0,935} \approx \frac{-0,668785}{-0,029190} \approx 22,92$$

Le stock est décroissant, il passe sous 3 000 pièces après 22,92 semaines, donc au bout de 23 **semaines** entières. **Vérification** : environ 3 191 pièces après 22 semaines et 2 984 après 23.

**Réponse.** 23 semaines.

### Correction de l'exercice 3 – Retrouver un taux de dépréciation

Le véhicule a perdu de la valeur pendant 4 ans, au même taux chaque année : le coefficient annuel  $a$  vérifie  $a^4 = \frac{19\,500}{34\,000} \approx 0,573529$ , donc

$$a = 0,573529^{\frac{1}{4}} \approx 0,8702$$

Le taux annuel vaut  $0,8702 - 1$ , soit une dépréciation d'environ 12,98 % **par an**.

**Vérification** :  $34\,000 \times 0,8702^4 \approx 19\,500$  €.

Avec ce modèle, le véhicule vaudrait environ 11 184 € au bout de 8 ans, soit une perte d'environ 67 %.

**Réponse.** Environ –12,98 % par an.

### Correction de l'exercice 4 – Une durée de vie utile

Perdre 2,8 % par an revient à multiplier la sensibilité par 0,972. Le capteur est remplacé lorsqu'elle atteint 60 % de sa valeur initiale :

$$0,972^x = 0,6 \Leftrightarrow x = \frac{\log 0,6}{\log 0,972} \approx \frac{-0,221849}{-0,012332} \approx 17,99$$

La durée de vie utile est d'environ 18 **ans**. **Vérification** :  $0,972^{18} \approx 0,5998$ , juste sous 60 %, alors qu'à 17 ans la sensibilité vaut encore environ 61,7 %. Par prudence, on planifierait le remplacement à 17 ans.

**Réponse.** Environ 18 ans.

### Correction de l'exercice 5 – Deux placements à comparer

Les deux placements sont égaux lorsque  $15\,000 \times 1,025^x = 12\,000 \times 1,042^x$ . On regroupe les puissances :

$$\left(\frac{1,042}{1,025}\right)^x = \frac{15}{12} = 1,25 \Leftrightarrow x = \frac{\log 1,25}{\log(1,042/1,025)} \approx \frac{0,096910}{0,007147} \approx 13,57$$

Le croisement a lieu au bout d'environ 13,57 ans, au cours de la **quatorzième année**.

**Vérification** : à 13 ans, A vaut environ 20 678 € et B 20 486 € ; à 14 ans, A vaut environ 21 195 € et B 21 347 € : B est passé devant.

**Réponse.** Environ 13,57 ans, donc au cours de la 14<sup>e</sup> année.

### Correction de l'exercice 6 – Une liaison optique

a) La puissance doit passer au plus de 50 mW à 0,5 mW, soit un rapport  $\frac{0,5}{50} = 0,01$ . En décibels :

$$10 \log 0,01 = 10 \times (-2) = -20 \text{ dB}$$

L'atténuation maximale admissible vaut 20 **dB**.

b) La fibre atténue de 0,25 dB par kilomètre, et les décibels s'additionnent : la portée vaut  $\frac{20}{0,25} = 80$  km.

**Vérification** : à 80 km, la puissance vaut  $50 \times 10^{-2} = 0,5$  mW, exactement le minimum. En pratique, on garderait une marge, par exemple 70 km, où la puissance reçue vaut environ 0,89 mW.

**Réponse.** a) 20 dB · b) 80 km.

### Correction de l'exercice 7 - Chaîne avec connecteurs

Les pertes en décibels s'additionnent tout le long de la liaison. Les composants consomment une partie fixe du budget de 20 dB :  $4 \times 0,4 = 1,6$  dB pour les connecteurs et 3 dB pour le coupleur, soit 4,6 dB.

Il reste  $20 - 4,6 = 15,4$  dB pour la fibre, d'où une portée de

$$\frac{15,4}{0,25} = 61,6 \text{ km}$$

On retient 61 **km** pour rester dans le budget. Chaque décibel de perte fixe coûte  $\frac{1}{0,25} = 4$  km de portée : les composants font perdre environ 18 km par rapport à la liaison nue.

**Réponse.** Environ 61 km (budget de 15,4 dB pour la fibre).

### Correction de l'exercice 8 - Un niveau sonore à ramener sous le seuil

Il faut gagner  $92 - 85 = 7$  dB. Si  $r$  est le rapport des intensités après et avant, le niveau varie de  $10 \log r$  :

$$10 \log r = -7 \Leftrightarrow \log r = -0,7 \Leftrightarrow r = 10^{-0,7} \approx 0,1995$$

L'intensité doit être multipliée par 0,2 environ, c'est-à-dire **divisée par 5**. **Contrôle** :  $10 \log 5 \approx 6,99$  dB.

Concrètement, cela revient par exemple à arrêter quatre machines identiques sur cinq, ou à capoter les sources dominantes. Une baisse de 7 dB s'entend nettement.

**Réponse.** Par environ 5.

### Correction de l'exercice 9 - Un pH à corriger

On compare les concentrations en ions hydrogène :  $10^{-3,2} \approx 6,31 \times 10^{-4}$  mol/L aujourd'hui, et au plus  $10^{-5,5} \approx 3,16 \times 10^{-6}$  mol/L pour respecter la norme. Le rapport vaut

$$\frac{10^{-3,2}}{10^{-5,5}} = 10^{-3,2+5,5} = 10^{2,3} \approx 199,5$$

Il faut diviser la concentration par environ 200. Par simple dilution, un litre de bain demanderait environ 199 L d'eau : en pratique, on neutralise le bain avec une base.

**Réponse.** Par environ 200.

### Correction de l'exercice 10 - Deux demi-vies

Pour comparer, on calcule la demi-vie de B, ou le taux horaire de A.

**Substance A.** La demi-vie vaut 6 h : le coefficient horaire  $a$  vérifie  $a^6 = 0,5$ , donc  $a = 0,5^{\frac{1}{6}} \approx 0,8909$ , soit une baisse d'environ 10,9 % par heure.

**Substance B.** Le coefficient horaire vaut 0,91, d'où la demi-vie

$$x = \frac{\log 0,5}{\log 0,91} \approx 7,35 \text{ h}$$

Les deux critères concordent : A a la demi-vie la plus courte ( $6 < 7,35$ ) et le taux de baisse le plus fort. La substance **A** disparaît le plus vite. Après 24 h, il reste  $0,5^4 = 6,25\%$  de A et environ  $0,91^{24} \approx 10,4\%$  de B.

**Réponse.** La substance A (demi-vie 6 h contre environ 7,35 h) ; après 24 h, il reste 6,25 % de A et environ 10,4 % de B.

### Correction de l'exercice 11 – Un seuil sur une somme

Les productions mensuelles forment une suite géométrique de premier terme 1 200 et de raison 0,95. Le cumul sur  $n$  mois vaut

$$1\,200 \times \frac{1 - 0,95^n}{1 - 0,95} = 24\,000(1 - 0,95^n)$$

On veut  $24\,000(1 - 0,95^n) \geq 15\,000$ , soit  $0,95^n \leq 0,375$ . Comme  $\log 0,95 < 0$ , diviser par ce nombre inverse le sens :  $n \geq \frac{\log 0,375}{\log 0,95} \approx 19,12$ .

Le plus petit entier qui convient est  $n = 20$  **mois**. **Vérification** : le cumul vaut environ 14 944 pièces après 19 mois et 15 396 après 20 mois. Il ne dépassera jamais 24 000 pièces.

**Réponse.** 20 mois.

### Correction de l'exercice 12 – Un objectif inatteignable

D'après l'exercice précédent, le cumul vaut  $24\,000(1 - 0,95^n)$ . Comme  $0,95^n > 0$ , on a  $1 - 0,95^n < 1$ , donc

$$24\,000(1 - 0,95^n) < 24\,000 \quad \text{pour tout } n$$

Le cumul se rapproche de 24 000 pièces sans jamais les atteindre : 26 000 pièces sont **inatteignables**.

Le calcul le confirme : il faudrait  $0,95^n \leq 1 - \frac{26}{24} \approx -0,083$ , ce qui est impossible pour une exponentielle. Il faut répondre au client que la machine plafonnera à 24 000 pièces, sauf à relancer la production.

**Réponse.** Impossible : le cumul plafonne à 24 000 pièces.

### Correction de l'exercice 13 – Retrouver une année de départ

La valeur vaut  $10\,000 \times 1,048^x$  après  $x$  années. On cherche  $x$  tel qu'elle atteigne 18 500 : on isole la puissance, puis on passe au logarithme.

$$1,048^x = 1,85 \Rightarrow x = \frac{\log 1,85}{\log 1,048} \approx \frac{0,267172}{0,020361} \approx 13,12$$

La valeur croît depuis environ 13,12 **ans**, soit un peu plus de 13 ans. **Vérification** :  $10\,000 \times 1,048^{13} \approx 18\,395$  et  $10\,000 \times 1,048^{14} \approx 19\,278$  encadrent bien 18 500.

**Réponse.** Environ 13,12 ans.

### Correction de l'exercice 14 – Deux inconnues à séparer

Pour séparer les deux inconnues, on fait le **quotient** des deux mesures :  $V_0$  se simplifie.

$$\frac{V(8)}{V(3)} = \frac{V_0 a^8}{V_0 a^3} = a^5 = \frac{1\,340}{820} \approx 1,634146$$

donc  $a = 1,634146^{\frac{1}{5}} \approx 1,1032$ , soit une hausse d'environ 10,32 % par unité de temps.

On revient ensuite à  $V_0$  avec  $V(3) = V_0 \times a^3 : a^3 \approx 1,342686$ , d'où  $V_0 = \frac{820}{1,342686} \approx 610,7$ .

**Vérification** :  $610,7 \times 1,1032^8 \approx 1\,340$ . Réponses :  $a \approx 1,1032$  et  $V_0 \approx 611$ .

**Réponse.**  $a \approx 1,1032$  (soit +10,32 %) et  $V_0 \approx 611$ .

### Correction de l'exercice 15 - Un contrôle de vraisemblance

a) Une croissance de 22 % par an revient à multiplier par 1,22 chaque année. Dans 30 ans :

$$8\,000 \times 1,22^{30} \approx 8\,000 \times 389,8 \approx 3\,118\,000 \text{ pièces}$$

soit près de 390 fois la production actuelle.

b) Ce résultat est **invraisemblable** : la capacité des machines, la taille du marché et l'approvisionnement en matières limitent la croissance. Un modèle calé sur trois années ne vaut que sur une durée du même ordre : à 5 ans, il prévoit déjà environ 21 600 pièces, ce qui est ambitieux. Toute extrapolation doit préciser son domaine de validité.

**Réponse.** a) environ 3,1 millions de pièces · b) invraisemblable : le modèle ne vaut que sur quelques années.

### Correction de l'exercice 16 - Synthèse : renouveler un parc de capteurs

a) Perdre 9 % des capteurs par an revient à multiplier par 0,91. Il en reste 200, la moitié, lorsque  $0,91^x = 0,5$  :

$$x = \frac{\log 0,5}{\log 0,91} \approx \frac{-0,30103}{-0,040959} \approx 7,35 \text{ ans}$$

C'est la demi-vie du parc.

b) Au bout de 5 ans, il reste  $400 \times 0,91^5 \approx 400 \times 0,624 \approx 250$  capteurs opérationnels : il faut en remplacer 150.

c) Chaque remplacement coûte  $180 + 45 = 225$  €, d'où un coût de  $150 \times 225 = 33\,750$  €.

d) La première année, 9 % de 400 capteurs tombent en panne, soit 36 capteurs, pour un coût de  $36 \times 225 = 8\,100$  €. Comme on les remplace chaque année, le parc reste à 400 capteurs : la cinquième année, il y a encore 36 pannes, soit 8 100 €. Sur cinq ans, cela fait 40 500 €.

Le remplacement annuel coûte 6 750 € de plus sur cinq ans, soit 1 350 € par an. En contrepartie, le parc reste complet, alors qu'avec la stratégie c) il ne compte plus que 62 % de ses capteurs au bout de cinq ans. Si la disponibilité des mesures est critique, le remplacement annuel se justifie.

**Réponse.** a) environ 7,35 ans · b) environ 250 opérationnels, 150 à remplacer · c) 33 750 € · d) 8 100 € par an, soit 40 500 € sur cinq ans.