

Plaquette 1 - Propriétés du log, équations et échelles

Fonction logarithme décimal — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— $\log$ est défini sur $]0; +\infty[$; $\log x$ est l'exposant à donner à 10 pour obtenir x :

$$\log(10^n) = n \quad \text{et} \quad 10^{\log x} = x \quad (x > 0)$$

— Valeurs de référence : $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 0,1 = -1$.

— Propriétés algébriques (pour $a > 0$ et $b > 0$) :

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \quad \log(a^n) = n \log a$$

— $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$.

— $\log$ est **strictement croissante** : $\log a < \log b \Leftrightarrow a < b$ (pour a et b strictement positifs).

— **Résolution d'une équation exponentielle** : $a^x = k$ (avec $a > 0$, $a \neq 1$, $k > 0$) donne

$$x \log a = \log k \quad \text{donc} \quad x = \frac{\log k}{\log a}$$

— Applications : niveau sonore $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ en décibels, avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$;
 $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$.

Correction de l'exercice 1 - Valeurs de référence

Par définition, $\log x$ est l'exposant qu'il faut donner à 10 pour obtenir x . On écrit donc chaque nombre comme une puissance de 10, puis on lit l'exposant :

$$\log(10^n) = n$$

— $1\,000 = 10^3$, donc $\log 1\,000 = 3$.

— $0,01 = 10^{-2}$, donc $\log 0,01 = -2$.

— $1 = 10^0$, donc $\log 1 = 0$.

— $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$, donc $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Contrôle : les nombres inférieurs à 1 ont un logarithme négatif, ceux qui sont supérieurs à 1 un logarithme positif.

Réponse. 3 ; -2 ; 0 ; 0,5.

Correction de l'exercice 2 - Propriétés du logarithme

On décompose et on applique les propriétés du cours.

a) $6 = 2 \times 3$, donc $\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0,301 + 0,477 = 0,778$.

b) $1,5 = \frac{3}{2}$, donc $\log 1,5 = \log 3 - \log 2 \approx 0,477 - 0,301 = 0,176$.

c) $8 = 2^3$, donc $\log 8 = 3 \log 2 \approx 0,903$.

d) $20 = 2 \times 10$, donc $\log 20 = \log 2 + \log 10 \approx 0,301 + 1 = 1,301$.

Réponse. a) $\approx 0,778$ · b) $\approx 0,176$ · c) $\approx 0,903$ · d) $\approx 1,301$.

Correction de l'exercice 3 - Résoudre une équation simple

a) $1\,000 = 10^3$, donc l'équation s'écrit $10^x = 10^3$ et $x = 3$.

b) Par définition du logarithme décimal, la solution de $10^x = b$ (avec $b > 0$) est $x = \log b$:

$$10^x = 45 \Leftrightarrow x = \log 45 \approx 1,653$$

Contrôle : $10^{1,653} \approx 45$, et 45 est compris entre 10 et 100, donc x est compris entre 1 et 2.

c) $\log x = 2$ signifie $x = 10^2 = 100$, qui est bien strictement positif.

Réponse. a) $x = 3$ · b) $x \approx 1,653$ · c) $x = 100$.

Correction de l'exercice 4 - Équation exponentielle

On applique le logarithme aux deux membres, puis la propriété $\log(a^x) = x \log a$:

$$x \log 1,05 = \log 2 \quad \text{donc} \quad x = \frac{\log 2}{\log 1,05}$$

— $\log 2 \approx 0,301\,03$ et $\log 1,05 \approx 0,021\,19$.

— $x \approx \frac{0,301\,03}{0,021\,19} \approx 14,21$.

— Interprétation : un capital placé à 5 % par an **double** en un peu plus de 14 ans.

— Contrôle : $1,05^{14} \approx 1,98$ et $1,05^{15} \approx 2,08$. Cohérent.

Réponse. $x \approx 14,21$: un capital à 5 % double en environ 14,2 ans.

Correction de l'exercice 5 - Seuil dans une décroissance

On cherche x tel que $0,88^x < 0,5$.

— On applique le logarithme (fonction croissante, l'inégalité est conservée) :

$$x \log 0,88 < \log 0,5$$

— **Attention :** $\log 0,88 \approx -0,055\,52$ est **négatif** ; en divisant par un nombre négatif, l'inégalité **change de sens** :

$$x > \frac{\log 0,5}{\log 0,88} \approx \frac{-0,301\,03}{-0,055\,52} \approx 5,42$$

— Il faut donc $x \geq 6$ ans (en années entières).

— Contrôle : $0,88^5 \approx 0,528$ (encore plus de la moitié) et $0,88^6 \approx 0,464$ (moins de la moitié). Cohérent.

Réponse. Au bout de 6 ans ($x > 5,42$).

Correction de l'exercice 6 - Comparer avec le logarithme

On utilise la **croissance** de la fonction $\log$: pour des nombres strictement positifs, $a < b$ équivaut à $\log a < \log b$.

a) $7 < 9$, donc $\log 7 < \log 9$.

b) $0,5 < 1$ et $\log 1 = 0$, donc $\log 0,5 < 0$: le logarithme d'un nombre compris entre 0 et 1 est négatif.

- c) On écrit 2 comme un logarithme, $2 = \log 100$. Comme $150 > 100$:
- $$\log 150 > \log 100 = 2$$

Contrôle : $\log 150 \approx 2,18$.

Réponse. a) $\log 7 < \log 9$ · b) $\log 0,5 < 0$ · c) $\log 150 > 2$.

Correction de l'exercice 7 - Niveau sonore en décibels

- a) $\frac{I}{I_0} = \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10^6$, donc $L = 10 \log(10^6) = 10 \times 6 = 60$ dB.
- b) $\frac{I}{I_0} = 10^8$, donc $L = 10 \times 8 = 80$ dB.
- Lecture importante : l'intensité a été multipliée par 100, mais le niveau n'a augmenté que de 20 dB. C'est tout l'intérêt de l'échelle logarithmique : elle **comprime** des rapports énormes.

Réponse. a) 60 dB · b) 80 dB.

Correction de l'exercice 8 - Doubler l'intensité sonore

Soit I l'intensité initiale et L le niveau correspondant. Avec $2I$:

$$L' = 10 \log\left(\frac{2I}{I_0}\right) = 10\left(\log 2 + \log \frac{I}{I_0}\right) = 10 \log 2 + L$$

- L'augmentation vaut donc $10 \log 2 \approx 10 \times 0,301 = 3,0$ dB, **quelle que soit** l'intensité de départ.
- C'est une règle bien connue en acoustique : doubler la puissance sonore ajoute environ 3 dB.

Réponse. Environ +3,0 dB (soit $10 \log 2$).

Correction de l'exercice 9 - Retrouver une intensité

On part de $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 95$.

- On divise par 10 : $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 9,5$.
- On applique $10^{\cdot}$ aux deux membres : $\frac{I}{I_0} = 10^{9,5}$.
- Donc $I = 10^{-12} \times 10^{9,5} = 10^{-2,5} \approx 3,16 \times 10^{-3}$ W/m².
- Contrôle : $10 \log\left(\frac{3,16 \times 10^{-3}}{10^{-12}}\right) = 10 \log(3,16 \times 10^9) \approx 10 \times 9,5 = 95$ dB. Cohérent.

Réponse. $I = 10^{-2,5} \approx 3,16 \times 10^{-3}$ W/m².

Correction de l'exercice 10 - Échelle de pH

- a) $\text{pH} = -\log(10^{-3}) = -(-3) = 3$: la solution est acide.
- b) $-\log[\text{H}^+] = 8,5$ donne $\log[\text{H}^+] = -8,5$, donc

$$[\text{H}^+] = 10^{-8,5} \approx 3,16 \times 10^{-9} \text{ mol/L}$$

La solution est basique, car son pH dépasse 7.

- c) Une baisse de 1 du pH signifie que $\log[\text{H}^+]$ augmente de 1. Or $\log(10 \times [\text{H}^+]) = 1 + \log[\text{H}^+]$: la concentration est **multipliée par 10**. Chaque unité de pH correspond à un facteur 10 sur la concentration.

Réponse. a) $\text{pH} = 3$ · b) $\approx 3,16 \times 10^{-9} \text{ mol/L}$ · c) $[\text{H}^+]$ est multipliée par 10.

Correction de l'exercice 11 - Problème : atténuation d'un signal

a) Coefficient 0,94 : $P(x) = 40 \times 0,94^x$.

b) On résout $40 \times 0,94^x < 10$, soit $0,94^x < 0,25$.

— On applique le logarithme : $x \log 0,94 < \log 0,25$.

— $\log 0,94 \approx -0,02687$ est négatif, donc l'inégalité change de sens :

$$x > \frac{\log 0,25}{\log 0,94} \approx \frac{-0,60206}{-0,02687} \approx 22,4$$

— Il faut donc 23 **tronçons**.

— Contrôle : $40 \times 0,94^{22} \approx 10,25 \text{ mW}$ et $40 \times 0,94^{23} \approx 9,64 \text{ mW}$. Cohérent.

Réponse. a) $P(x) = 40 \times 0,94^x$ · b) 23 tronçons.

Correction de l'exercice 12 - Retrouver un coefficient moyen

a) Les deux membres sont strictement positifs : on peut leur appliquer le logarithme. Avec la propriété $\log(x^n) = n \log x$:

$$x^5 = 3 \Leftrightarrow 5 \log x = \log 3 \Leftrightarrow \log x = \frac{\log 3}{5} \approx 0,09542$$

Par définition du logarithme, $x = 10^{0,09542} \approx 1,2457$. C'est aussi $3^{\frac{1}{5}}$, la racine cinquième de 3.

b) Le coefficient annuel moyen vaut environ 1,2457 : le taux annuel moyen est d'environ 24,57 %.

Contrôle : $1,2457^5 \approx 3,00$.

Réponse. a) $x = 10^{\frac{\log 3}{5}} \approx 1,2457$ · b) environ +24,57 % par an.

Correction de l'exercice 13 - Compter les chiffres d'un grand nombre

a) On utilise la propriété des puissances :

$$\log(7^{40}) = 40 \log 7 \approx 40 \times 0,84510 \approx 33,80$$

donc $33 < \log(7^{40}) < 34$.

b) La fonction $x \mapsto 10^x$ est croissante, donc $10^{33} < 7^{40} < 10^{34}$. Or 10^{33} s'écrit avec 34 chiffres (un 1 suivi de 33 zéros), et tous les entiers inférieurs à 10^{34} ont au plus 34 chiffres : 7^{40} s'écrit avec 34 **chiffres**.

En général, un entier N tel que $p \leq \log N < p+1$ s'écrit avec $p+1$ chiffres : c'est la partie entière du logarithme, plus un.

Réponse. a) $33 < \log(7^{40}) < 34$ · b) 34 chiffres.

Correction de l'exercice 14 - Une suite en repère semi-logarithmique

a) On calcule $\log 5 \approx 0,699$, $\log 15 \approx 1,176$, $\log 45 \approx 1,653$ et $\log 135 \approx 2,130$.

n	0	1	2	3
$\log u_n$	0,699	1,176	1,653	2,130

On remarque que l'on ajoute toujours environ 0,477, c'est-à-dire $\log 3$.

b) Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes, et celui d'une puissance se multiplie par l'exposant :

$$\log u_n = \log 5 + \log(3^n) = \log 5 + n \log 3$$

Les points $(n; \log u_n)$ sont donc **alignés** sur la droite d'équation $y = \log 5 + x \log 3$, de pente $\log 3$. C'est le principe du repère semi-logarithmique : une évolution géométrique y apparaît comme une droite.

Réponse. a) 0,699 ; 1,176 ; 1,653 ; 2,130 · b) les points sont alignés, sur une droite de pente $\log 3$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : temps de doublement

a) On résout $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^x = 2$, donc

$$x = \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$$

b) $t = 3 : x = \frac{0,301\,03}{\log 1,03} \approx \frac{0,301\,03}{0,012\,84} \approx 23,4$ périodes.

— $t = 7 : x \approx \frac{0,301\,03}{0,029\,38} \approx 10,2$ périodes.

— $t = 15 : x \approx \frac{0,301\,03}{0,060\,70} \approx 5,0$ périodes.

c) La règle des 70 donne $\frac{70}{3} \approx 23,3$, $\frac{70}{7} = 10$ et $\frac{70}{15} \approx 4,7$.

— L'approximation est excellente pour les petits taux et se dégrade quand t augmente : c'est une règle de calcul mental, le logarithme donne la valeur exacte.

Réponse. a) $x = \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$ · b) $\approx 23,4 ; 10,2 ; 5,0$ · c) règle des 70 : 23,3 ; 10 ; 4,7.