

Plaquette 3 - Résoudre une équation exponentielle

Fonction logarithme décimal — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La formule clé. Pour $a > 0$, $a \neq 1$ et $k > 0$:

$$a^x = k \Leftrightarrow x \log a = \log k \Leftrightarrow x = \frac{\log k}{\log a}$$

La méthode, en trois gestes.

1. **Isoler** la puissance : ramener l'équation à $a^x = k$. 2. **Prendre le logarithme** des deux membres, puis descendre l'exposant. 3. **Diviser** par $\log a$, sans oublier que ce nombre peut être **négatif**.

⚠ Quand $0 < a < 1$, on a $\log a < 0$: diviser par un nombre négatif **change le sens** d'une inéquation.

Inéquations.

Équation de départ	Base	Résultat
$a^x > k$	$a > 1$	$x > \frac{\log k}{\log a}$
$a^x > k$	$0 < a < 1$	$x < \frac{\log k}{\log a}$

Cas sans solution. $a^x = k$ n'a aucune solution si $k \leq 0$: une exponentielle est toujours strictement positive.

Deux formules dérivées.

$$\text{temps de doublement} = \frac{\log 2}{\log a} \quad \text{demi-vie} = \frac{\log 0,5}{\log a}$$

Arrondir correctement. Quand x compte des années ou des mois, on arrondit à l'entier **supérieur** pour un dépassement de seuil, et à l'entier **inférieur** pour une durée maximale.

Correction de l'exercice 1 - Une première équation

On applique le logarithme aux deux membres, puis la propriété $\log(a^x) = x \log a$:

$$2^x = 50 \Leftrightarrow x \log 2 = \log 50 \Leftrightarrow x = \frac{\log 50}{\log 2} \approx \frac{1,69897}{0,30103} \approx 5,64$$

On peut diviser par $\log 2$, qui n'est pas nul. **Contrôle** : $2^5 = 32$ et $2^6 = 64$ encadrent 50, donc la solution est entre 5 et 6 ; et $2^{5,64} \approx 49,9$. Réponse : $x \approx 5,64$.

Réponse. $x \approx 5,64$.

Correction de l'exercice 2 - Avec une base décimale

On passe au logarithme pour faire descendre l'exposant :

$$1,06^x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{\log 3}{\log 1,06} \approx \frac{0,47712}{0,025306} \approx 18,85$$

Contrôle : $1,06^{18} \approx 2,854$ et $1,06^{19} \approx 3,026$ encadrent bien 3.

Interprétation : un capital placé à 6 % par an triple en un peu moins de 19 ans. Réponse : $x \approx 18,85$.

Réponse. $x \approx 18,85$.

Correction de l'exercice 3 - Une base inférieure à 1

On passe au logarithme :

$$0,85^x = 0,2 \Leftrightarrow x = \frac{\log 0,2}{\log 0,85} \approx \frac{-0,69897}{-0,070581} \approx 9,90$$

Les deux logarithmes sont négatifs, car 0,2 et 0,85 sont inférieurs à 1 : leur quotient est positif. Oublier ce signe conduirait à une solution négative, absurde ici.

Contrôle : $0,85^{9,90} \approx 0,200$. Une baisse de 15 % par étape ramène donc à 20 % de la valeur en un peu moins de dix étapes. Réponse : $x \approx 9,90$.

Réponse. $x \approx 9,90$.

Correction de l'exercice 4 - Isoler avant de résoudre

On commence par **isoler la puissance** en divisant par 500 : $1,04^x = \frac{900}{500} = 1,8$. On passe ensuite au logarithme :

$$x = \frac{\log 1,8}{\log 1,04} \approx \frac{0,255273}{0,017033} \approx 14,99$$

Contrôle : $500 \times 1,04^{14,99} \approx 900$. Passer au logarithme sans avoir isolé la puissance serait une erreur, car $\log(500 \times 1,04^x) \neq 500 \log(1,04^x)$.

Si x compte des années, la valeur 900 est atteinte tout juste avant la fin de la quinzième année. Réponse : $x \approx 14,99$.

Réponse. $x \approx 14,99$, soit 15 ans en années entières.

Correction de l'exercice 5 - Un seuil de décroissance

Le stock vaut $6\,000 \times 0,91^x$ après x mois. On résout d'abord l'égalité avec 2 500, en isolant la puissance :

$$0,91^x = \frac{2\,500}{6\,000} \approx 0,416667 \Leftrightarrow x = \frac{\log 0,416667}{\log 0,91} \approx \frac{-0,380211}{-0,040959} \approx 9,28$$

Le stock est décroissant, donc il passe sous 2 500 pièces après 9,28 mois. En mois entiers, il faut attendre 10 **mois**. **Contrôle** : après 9 mois, il reste environ 2 568 pièces, encore au-dessus ; après 10 mois, environ 2 336.

Réponse. $x \approx 9,28$, donc 10 mois entiers.

Correction de l'exercice 6 - Temps de doublement

Le capital doublé vérifie $1,045^x = 2$. On passe au logarithme :

$$x = \frac{\log 2}{\log 1,045} \approx \frac{0,30103}{0,019116} \approx 15,75$$

Le capital double au bout d'environ 15,75 ans, donc au cours de la seizième année : en années entières, il faut 16 **ans**. **Contrôle** : $1,045^{15} \approx 1,935$ et $1,045^{16} \approx 2,022$.

La règle de 72 donne $\frac{72}{4,5} = 16$, ce qui concorde.

Réponse. Environ 15,75 ans, soit 16 années entières.

Correction de l'exercice 7 - Demi-vie

Perdre 7 % par heure revient à multiplier la masse par 0,93. La demi-vie est la durée x telle que $0,93^x = 0,5$:

$$x = \frac{\log 0,5}{\log 0,93} \approx \frac{-0,30103}{-0,031517} \approx 9,55 \text{ h}$$

Vérification : $0,93^{9,55} \approx 0,500$. La masse initiale n'intervient pas dans l'équation : la demi-vie en est indépendante. Au bout de deux demi-vies, environ 19,10 h, il reste un quart de la masse. Réponse : environ 9,55 **heures**.

Réponse. Environ 9,55 heures.

Correction de l'exercice 8 - Une inéquation classique

La fonction log est croissante, donc appliquer log aux deux membres conserve le sens de l'inégalité : $x \log 1,07 > \log 4$.

Comme $1,07 > 1$, $\log 1,07$ est **positif** : en divisant par ce nombre, le sens est conservé.

$$x > \frac{\log 4}{\log 1,07} \approx \frac{0,60206}{0,029384} \approx 20,49$$

Contrôle : $1,07^{20} \approx 3,870 < 4$ et $1,07^{21} \approx 4,141 > 4$. Réponse : $x > 20,49$ environ.

Réponse. $x > 20,49$ environ.

Correction de l'exercice 9 - Une inéquation qui change de sens

On applique log, qui conserve l'ordre : $x \log 0,8 < \log 0,1$. Mais $\log 0,8 \approx -0,09691$ est **négalif**, car $0,8 < 1$: en divisant par ce nombre, le sens de l'inégalité **s'inverse**.

$$x > \frac{\log 0,1}{\log 0,8} \approx \frac{-1}{-0,09691} \approx 10,32$$

Contrôle : $0,8^{10} \approx 0,1074$ est encore au-dessus de 0,1, alors que $0,8^{11} \approx 0,0859$ est en dessous. C'est cohérent : plus x grandit, plus $0,8^x$ diminue. Garder le sens et écrire $x < 10,32$ serait une erreur. Réponse : $x > 10,32$ environ.

Réponse. $x > 10,32$ environ.

Correction de l'exercice 10 - Une équation sans solution

Pour tout réel x , on a $1,5^x > 0$: une exponentielle de base positive est toujours strictement positive. Elle ne peut donc pas valoir -4 , et l'équation n'a **aucune solution**.

$$a^x > 0 \text{ pour tout réel } x$$

Il ne faut pas écrire $x = \frac{\log(-4)}{\log 1,5}$: le logarithme n'est défini que pour les nombres strictement positifs, et $\log(-4)$ n'existe pas. Avant tout calcul, on vérifie le signe du second membre. Réponse : l'ensemble des solutions est vide.

Réponse. Aucune solution : une exponentielle est toujours strictement positive.

Correction de l'exercice 11 - Comparer deux résolutions

a) La production dépasse 5 000 unités lorsque $3\,000 \times 1,05^x > 5\,000$. On isole la puissance, puis on passe au logarithme ($\log 1,05 > 0$, le sens est conservé) :

$$1,05^x > \frac{5}{3} \Leftrightarrow x > \frac{\log(5/3)}{\log 1,05} \approx \frac{0,221849}{0,021189} \approx 10,47$$

Le seuil est franchi au bout d'environ 10,47 ans.

b) Par balayage : $3\,000 \times 1,05^{10} \approx 4\,887$ et $3\,000 \times 1,05^{11} \approx 5\,131$. En années entières, la réponse est 11 ans, ce qui est cohérent avec 10,47 arrondi à l'entier supérieur.

Le logarithme donne la valeur précise en une ligne ; le balayage donne directement l'année entière demandée.

Réponse. a) environ 10,47 ans · b) le balayage donne 11 années entières, ce qui est cohérent.

Correction de l'exercice 12 - Retrouver un taux

La grandeur est multipliée par 3 en 12 ans : la base annuelle a vérifie $a^{12} = 3$. On passe au logarithme :

$$12 \log a = \log 3 \Leftrightarrow \log a = \frac{\log 3}{12} \approx 0,03976$$

donc $a = 10^{0,03976} \approx 1,0959$. On obtient la même valeur avec $a = 3^{\frac{1}{12}}$.

Le taux annuel vaut environ +9,59 %. **Vérification** : $1,0959^{12} \approx 3,000$.

Réponse. Environ +9,59 % par an.

Correction de l'exercice 13 - Un double seuil

Perdre 11 % par heure revient à multiplier par 0,89 : l'activité vaut $5\,000 \times 0,89^x$, et $\log 0,89 \approx -0,050610$.

Premier seuil. 2 500 Bq correspond à un rapport $\frac{2\,500}{5\,000} = 0,5$:

$$0,89^x = 0,5 \Leftrightarrow x = \frac{\log 0,5}{\log 0,89} \approx 5,95 \text{ h}$$

Second seuil. 1 000 Bq correspond à un rapport 0,2 : $x = \frac{\log 0,2}{\log 0,89} \approx 13,81 \text{ h}$.

Passer de 50 % à 20 % prend $13,81 - 5,95 = 7,86 \text{ h}$, plus longtemps qu'atteindre 50 % : chaque division par deux prend 5,95 h, et diviser par 2,5 prend plus qu'une demi-vie. Réponses : environ 5,95 h puis 13,81 h.

Réponse. Environ 5,95 h puis 13,81 h.

Correction de l'exercice 14 - Une équation à deux exponentielles

Les deux capitaux s'égalisent lorsque $8\,000 \times 1,03^x = 6\,000 \times 1,05^x$. On regroupe les puissances d'un côté et les constantes de l'autre :

$$\frac{1,05^x}{1,03^x} = \frac{8\,000}{6\,000} \Leftrightarrow \left(\frac{1,05}{1,03}\right)^x = \frac{4}{3}$$

La base vaut environ 1,019417. On passe au logarithme :

$$x = \frac{\log(4/3)}{\log 1,019417} \approx \frac{0,124939}{0,008353} \approx 14,96.$$

Les capitaux s'égalisent au bout d'environ 14,96 ans, au cours de la **quinzième année**.

Vérification : à 15 ans, environ 12 464 € et 12 474 € : le second vient de passer devant.

Réponse. Environ 14,96 ans, donc au cours de la 15^e année.

Correction de l'exercice 15 – Arrondir dans le bon sens

Le calcul dit que le seuil est franchi à $x \approx 7,3$: au bout de 7 ans il ne l'est pas encore, au bout de 8 ans il l'est.

a) La question porte sur le **premier** instant où l'on dépasse le seuil : on arrondit à l'entier supérieur. On dépasse le seuil à partir de la **huitième année**.

b) La question porte sur la durée **pendant laquelle** on reste sous le seuil : on arrondit à l'entier inférieur. On reste sous le seuil pendant 7 **années complètes**.

$$7 < 7,3 < 8$$

Les deux réponses sont consécutives. Donner 7 dans les deux cas serait une erreur : il faut relire la question avant d'arrondir.

Réponse. a) la 8^e année · b) 7 années complètes.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : dimensionner un amortissement

a) On cherche quand $60\,000 \times 0,78^x = 20\,000$, soit $0,78^x = \frac{1}{3}$:

$$x = \frac{\log(1/3)}{\log 0,78} \approx \frac{-0,477121}{-0,107905} \approx 4,42 \text{ ans}$$

La machine passe sous 20 000 € au cours de la cinquième année.

b) La demi-vie vérifie $0,78^x = 0,5$, d'où $x = \frac{\log 0,5}{\log 0,78} \approx 2,79$ ans. **Contrôle** :

$$60\,000 \times 0,78^{2,79} \approx 30\,000 \text{ €}.$$

c) On regroupe : $60\,000 \times 0,78^x = 75\,000 \times 0,85^x$ équivaut à $\left(\frac{0,78}{0,85}\right)^x = 1,25$, d'où

$x = \frac{\log 1,25}{\log 0,917647} \approx -2,60$. La solution est **négative** : les deux courbes se coupent avant l'achat, jamais dans le futur. La seconde machine est plus chère **et** perd moins vite sa valeur, elle reste donc toujours au-dessus.

d) Au bout de 10 ans, la première vaut $60\,000 \times 0,78^{10} \approx 5\,001$ € et la seconde $75\,000 \times 0,85^{10} \approx 14\,766$ €. La seconde a coûté 15 000 € de plus à l'achat mais se revend environ 9 765 € de plus : sur dix ans, elle coûte environ 5 235 € de plus, soit à peu près 524 € par an. Cette comparaison ignore l'entretien et la production de chaque machine.

Réponse. a) environ 4,42 ans · b) environ 2,79 ans · c) jamais dans le futur (solution négative) · d) 5 001 € contre 14 766 €, soit environ 5 235 € de surcoût net sur dix ans.