

MATHÉMATIQUES

Fonction logarithme décimal

Terminale STI2D

Logarithme décimal • $10^x = b$ • Sens de variation • $\log(ab) = \log a + \log b$
 $\log(a^n) = n \log a$ • Équation $a^x = b$ • Seuil • Ordre de grandeur • Décibel

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe terminale** (arrêté du 26 février 2026, applicable à la rentrée 2027 ; la partie « Analyse » reprend celle du programme de 2019), partie « Analyse », section « Fonction logarithme décimal ». Il couvre :

- définition de $\log b$ ($b > 0$) comme unique solution de $10^x = b$; sens de variation ;
- propriétés algébriques : $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log \frac{1}{b} = -\log b$, $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$, $\log(a^n) = n \log a$;
- résolution de $a^x = b$, $x^a = b$, $a^x < b$, $x^a < b$ et $a^n < b$ (n entier) ;
- ordre de grandeur, nombre de chiffres d'un entier ; échelle logarithmique.

Objectif : définir le logarithme décimal, utiliser ses propriétés et s'en servir pour résoudre des équations et inéquations de la forme $a^x = b$, $x^a = b$ ou $a^n < b$.

Table des matières

1	Définition	3
2	Sens de variation	3
3	Propriétés algébriques	3
4	Résoudre des équations et des inéquations	4
5	Ordres de grandeur et échelles logarithmiques	4
6	Erreurs classiques	5
7	Fiche de synthèse	5
8	Exercices d'application	5
9	Corrigés des exercices	6

1. Définition

Logarithme décimal

Pour tout réel $b > 0$, l'équation $10^x = b$ a une unique solution, appelée **logarithme décimal** de b et notée $\log b$:

$$10^x = b \iff x = \log b \quad (b > 0).$$

Conséquences

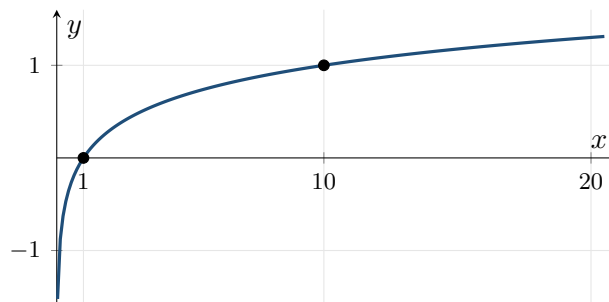
$\log 1 = 0$; $\log 10 = 1$; $\log(10^n) = n$; $10^{\log b} = b$ pour $b > 0$; $\log(10^x) = x$ pour tout réel x . Le logarithme d'un nombre négatif ou nul n'existe pas.

$$\log 1\,000 = 3 ; \log 0,01 = \log(10^{-2}) = -2 ; \log \sqrt{10} = \log(10^{0,5}) = 0,5.$$

2. Sens de variation

Variations

La fonction $\log$ est strictement **croissante** sur $]0; +\infty[$: pour $a > 0$ et $b > 0$, $a < b \iff \log a < \log b$. De plus $\log x < 0$ si $0 < x < 1$ et $\log x > 0$ si $x > 1$.



Courbe de $x \mapsto \log x$: elle passe par $(1; 0)$ et $(10; 1)$, et croît de plus en plus lentement.

3. Propriétés algébriques

Règles de calcul

Pour $a > 0$, $b > 0$ et n entier naturel :

$$\boxed{\log(ab) = \log a + \log b} \quad \log \frac{1}{b} = -\log b \quad \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \quad \boxed{\log(a^n) = n \log a}$$

Démonstration. On admet la première (elle traduit $10^{x+y} = 10^x \times 10^y$). Alors $\log b + \log \frac{1}{b} = \log(b \times \frac{1}{b}) = \log 1 = 0$, d'où $\log \frac{1}{b} = -\log b$, puis $\log \frac{a}{b} = \log a + \log \frac{1}{b} = \log a - \log b$. Enfin $\log(a^2) = \log a + \log a = 2 \log a$, et de même pour $n = 3, 4, \dots$

$$\log 200 = \log 2 + \log 100 = \log 2 + 2; \quad \log 8 - \log 0,8 = \log \frac{8}{0,8} = \log 10 = 1.$$

4. Résoudre des équations et des inéquations

Équation $a^x = b$

Pour $a > 0$, $a \neq 1$ et $b > 0$: $a^x = b \iff x \log a = \log b \iff \boxed{x = \frac{\log b}{\log a}}$.

Équation $x^a = b$, $x > 0$

$x^a = b \iff x = b^{\frac{1}{a}}$: c'est ainsi qu'on calcule un taux moyen.

Inéquation $a^n > b$, n entier

On applique $\log$, qui conserve l'ordre : $n \log a > \log b$. On divise par $\log a$ en **changeant le sens** si $\log a < 0$ (c'est-à-dire si $0 < a < 1$).

Doubler un capital

Un capital placé à 3 % par an double quand $1,03^n \geq 2$, soit $n \geq \frac{\log 2}{\log 1,03} \approx 23,4$: il faut 24 ans.

Une décroissance

Une grandeur perd 10 % par an. Elle passe sous 10 % de sa valeur initiale quand $0,9^n < 0,1$, soit $n \log 0,9 < -1$. Comme $\log 0,9 < 0$: $n > \frac{-1}{\log 0,9} \approx 21,9$, donc à partir de $n = 22$.

5. Ordres de grandeur et échelles logarithmiques

Nombre de chiffres

Si $10^k \leq N < 10^{k+1}$ (k entier), alors $k \leq \log N < k + 1$: l'entier N s'écrit avec $k + 1$ chiffres, et $\log N$ donne son ordre de grandeur.

$\log(2^{50}) = 50 \log 2 \approx 15,05$: 2^{50} s'écrit avec 16 chiffres (il vaut environ $1,1 \times 10^{15}$).

Niveau sonore

Le niveau sonore est $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ (en décibels). Doubler l'intensité I ajoute $10 \log 2 \approx 3$ dB ; la multiplier par 10 ajoute 10 dB.

Repère semi-logarithmique

Sur un axe gradué en $\log y$, les valeurs 1, 10, 100, 1 000 sont équidistantes : une grandeur à évolution relative constante ($y = ka^x$) y est représentée par une droite.

6. Erreurs classiques**À éviter**

- Écrire $\log(a + b) = \log a + \log b$: la règle concerne le **produit**.
- Oublier de changer le sens de l'inégalité en divisant par $\log a < 0$.
- Calculer le logarithme d'un nombre négatif ou nul.
- Arrondir n à l'entier le plus proche au lieu de prendre l'entier qui vérifie vraiment l'inégalité.

7. Fiche de synthèse

Définition	$10^x = b \iff x = \log b \ (b > 0) ; \log 1 = 0, \log 10 = 1$
Variations	strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$
Règles	$\log(ab) = \log a + \log b ; \log \frac{a}{b} = \log a - \log b ; \log(a^n) = n \log a$
Équations	$a^x = b \iff x = \frac{\log b}{\log a} ; x^a = b \iff x = b^{1/a}$
Inéquations	diviser par $\log a < 0$ change le sens
Chiffres	$k \leq \log N < k + 1 : k + 1$ chiffres

8. Exercices d'application**Exercice 1 – Valeurs exactes**

Calculer $\log 100\,000$, $\log 0,001$ et $\log(10^{2,5})$.

Exercice 2 – Équation

Résoudre $5^x = 40$ (valeur arrondie au millième).

Exercice 3 – Seuil

Déterminer le plus petit entier n tel que $1,05^n > 3$.

Exercice 4 – Taux moyen

Un chiffre d'affaires est multiplié par 1,5 en 10 ans. Calculer le taux d'évolution annuel moyen.

Exercice 5 – Nombre de chiffres

Combien de chiffres compte l'écriture décimale de 3^{40} ?

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $\log 100\,000 = 5$; $\log 0,001 = -3$; $\log(10^{2,5}) = 2,5$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $x = \frac{\log 40}{\log 5} \approx 2,292$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $n \log 1,05 > \log 3$ et $\log 1,05 > 0$: $n > \frac{\log 3}{\log 1,05} \approx 22,5$, donc $n = 23$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $x^{10} = 1,5 \iff x = 1,5^{0,1} \approx 1,041\,4$: environ $+4,14\%$ par an.

Corrigé de l'exercice 5

Corrigé. $\log(3^{40}) = 40 \log 3 \approx 19,08$: $19 \leq \log(3^{40}) < 20$, donc 20 chiffres.