

Plaquette 5 - Applications : seuils, décibels, pH et demi-vies

Fonction logarithme népérien — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dater un seuil.

$$q^n = s \Leftrightarrow n = \frac{\ln s}{\ln q} \quad e^{-kt} = s \Leftrightarrow t = -\frac{\ln s}{k}$$

- $\triangle$ Si $0 < q < 1$, alors $\ln q < 0$: diviser par $\ln q$ **inverse** le sens d'une inégalité.
- **Temps de doublement** à un taux $t\%$: $n = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$, soit environ $\frac{70}{t}$ années (règle des 70).
- **Demi-vie** d'une décroissance $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Construire une échelle logarithmique.

- **Logarithme décimal** : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$, avec $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log(10^n) = n$.
- **Décibels** : $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ — multiplier l'intensité par 10 ajoute 10 dB.
- **pH** : $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ — diviser la concentration par 10 ajoute une unité de pH.
- **Principe commun** : ces échelles transforment un rapport **multiplicatif** en un écart **additif**.
- **Contrôle systématique** : une durée trouvée doit être positive, et on vérifie toujours en remplaçant dans le modèle initial.

Correction de l'exercice 1 - Temps de charge d'un condensateur

Mise en équation.

- $12(1 - e^{-2t}) = 11$, soit $1 - e^{-2t} = \frac{11}{12}$.
- Donc $e^{-2t} = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$.

Application du logarithme.

- $-2t = \ln\left(\frac{1}{12}\right) = -\ln 12$.

$$t = \frac{\ln 12}{2}$$

- Valeur approchée : $\frac{2,4849}{2} \approx 1,242$ s.

Vérification.

- $u(1,242) = 12(1 - e^{-2,485}) \approx 12 \times 0,9167 \approx 11,00$ V. Correct.
- **Ordre de grandeur** : la constante de temps vaut $\tau = 0,5$ s, et 11 V représente 91,7 % de la tension finale. Le résultat 1,24 s, soit environ $2,5\tau$, est cohérent avec le repère « 86,5 % à 2τ ».

Réponse. $t = \frac{\ln 12}{2} \approx 1,242$ s.

Correction de l'exercice 2 - Temps de refroidissement

Mise en équation.

- $20 + 60 e^{-0,05t} = 30$, soit $60 e^{-0,05t} = 10$.
- Donc $e^{-0,05t} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

Application du logarithme.

- $-0,05t = \ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln 6$.

$$t = \frac{\ln 6}{0,05} = 20 \ln 6$$

- Valeur approchée : $20 \times 1,7918 \approx 35,84$ min.

Vérification.

- $\theta(35,84) = 20 + 60 e^{-1,792} \approx 20 + 10,00 = 30,0$ °C. Correct.
- **Étape indispensable** : isoler l'exponentielle **avant** d'appliquer le logarithme. Écrire directement $\ln(20 + 60e^{-0,05t}) = \ln 30$ ne mène nulle part, puisque $\ln$ d'une somme ne se développe pas.

Réponse. $t = 20 \ln 6 \approx 35,84$ min.

Correction de l'exercice 3 - Décote d'un véhicule

Mise en inéquation. La valeur après n ans est $12\,000 \times 0,85^n$.

- $12\,000 \times 0,85^n < 4\,000$, soit $0,85^n < \frac{1}{3}$.

Application du logarithme.

- $n \ln 0,85 < \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$.
- $\triangle \ln 0,85 \approx -0,1625$ est **négatif** : la division inverse le sens.

$$n > \frac{-\ln 3}{\ln 0,85} = \frac{\ln 3}{-\ln 0,85} \approx \frac{1,0986}{0,1625} \approx 6,76$$

- Le plus petit entier convenable est $n = 7$.

Vérification.

- $12\,000 \times 0,85^6 \approx 4\,525,79$ € : encore au-dessus.
- $12\,000 \times 0,85^7 \approx 3\,846,93$ € : en dessous.
- **Remarque sur le résultat** : le seuil ne dépend pas du prix d'achat mais du **rapport** $\frac{4\,000}{12\,000} = \frac{1}{3}$. Un véhicule à 30 000 € tomberait sous 10 000 € en 7 ans également.

Réponse. 7 années.

Correction de l'exercice 4 - Demi-vie d'un isotope

a) **Mise en équation.** La demi-vie T vérifie $N(T) = \frac{N_0}{2}$.

- $N_0 e^{-0,05T} = \frac{N_0}{2}$, et on simplifie par $N_0 > 0$:
- $e^{-0,05T} = 0,5$, donc $-0,05T = \ln 0,5 = -\ln 2$.

$$T = \frac{\ln 2}{0,05} = 20 \ln 2 \approx 13,86 \text{ ans}$$

b) On résout $e^{-0,05t} < 0,1$.

- $-0,05t < \ln 0,1 = -\ln 10$.
- Division par $-0,05$, négatif : le sens s'inverse.

$$t > \frac{\ln 10}{0,05} = 20 \ln 10 \approx 46,05 \text{ ans}$$

- Il faut donc un peu plus de 46 ans.
- **Contrôle par les demi-vies** : $46,05 \div 13,86 \approx 3,32$ demi-vies. Or après 3 demi-vies il reste $\frac{1}{8} = 12,5\%$, et après 4 demi-vies $6,25\%$. Le seuil de 10% tombe bien entre les deux. Cohérent.
- **Formule générale** : $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$. La demi-vie ne dépend **pas** de la quantité initiale.

Réponse. a) $T = 20 \ln 2 \approx 13,86$ ans · b) environ 46,05 ans.

Correction de l'exercice 5 - Temps de doublement d'un placement

a) **Mise en inéquation.** Le capital vaut $C \times 1,07^n$.

- $C \times 1,07^n \geq 2C$, soit $1,07^n \geq 2$ après simplification par $C > 0$.
- $n \ln 1,07 \geq \ln 2$, avec $\ln 1,07 \approx 0,0677$ **positif** : le sens se conserve.

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,07} = \frac{0,6931}{0,0677} \approx 10,24$$

- Il faut donc 11 années pour que le capital ait plus que doublé.

b) **Règle des 70.** Elle annonce $\frac{70}{7} = 10$ années.

- L'écart avec la valeur exacte (10,24) est de $2,4\%$: l'approximation est excellente.
- **D'où vient la règle** : $\ln 2 \approx 0,693$, et pour un petit taux t , $\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) \approx \frac{t}{100}$. Le quotient vaut donc environ $\frac{69,3}{t}$, arrondi à $\frac{70}{t}$ pour la commodité du calcul mental.
- **Limite de validité** : la règle se dégrade pour les taux élevés. À 30% , elle annonce 2,33 ans contre 2,64 en réalité, soit 12% d'erreur.

Réponse. a) 11 années (10,24 exactement) · b) la règle des 70 donne 10 ans, à $2,4\%$ près.

Correction de l'exercice 6 - Le logarithme décimal

On utilise $\ln(10^n) = n \ln 10$.

- $\log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$.
- $\log 100 = \frac{\ln(10^2)}{\ln 10} = \frac{2 \ln 10}{\ln 10} = 2$.
- $\log 1\,000 = 3$, par le même calcul.
- $0,001 = 10^{-3}$, donc $\log 0,001 = -3$.

Propriété générale.

$$\log(10^n) = n$$

- Le logarithme décimal **compte les zéros** : il donne l'ordre de grandeur d'un nombre.
- **Il hérite de toutes les règles de $\ln$** : $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log(a^n) = n \log a$. Ce n'est qu'un changement d'unité, comme passer des radians aux degrés.
- **Usage** : $\ln$ pour l'analyse (dérivées, primitives), $\log$ pour les échelles physiques (décibels, pH, Richter).

Réponse. 1 ; 2 ; 3 ; -3.

Correction de l'exercice 7 - Niveau sonore en décibels

a) On calcule d'abord le rapport.

$$- \frac{I}{I_0} = \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10^6.$$

$$- L = 10 \log(10^6) = 10 \times 6 = 60 \text{ dB}.$$

— C'est le niveau d'une conversation courante.

$$\text{b) } - \frac{I}{I_0} = \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10^9.$$

— $L = 10 \times 9 = 90 \text{ dB}$: le niveau d'une tondeuse à gazon, à la limite du dommage auditif pour une exposition prolongée.

Ce que l'échelle compresse.

— Entre les deux situations, l'intensité physique est multipliée par 1 000, mais le niveau ne gagne que 30 dB.

— **C'est tout l'intérêt du logarithme** : il ramène une plage de 10^{12} (du seuil d'audition au seuil de douleur) à une échelle de 0 à 120 dB, directement lisible.

Réponse. a) 60 dB · b) 90 dB.

Correction de l'exercice 8 - Doubler l'intensité sonore

$$\text{a) Notons } L_1 = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ et } L_2 = 10 \log\left(\frac{2I}{I_0}\right).$$

$$- L_2 - L_1 = 10 \left[\log\left(\frac{2I}{I_0}\right) - \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \right] = 10 \log 2.$$

$$- \log 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} \approx \frac{0,6931}{2,3026} \approx 0,301.$$

— L'augmentation est donc de $10 \times 0,301 \approx 3,01 \text{ dB}$, soit environ **3 dB**.

b) On cherche n tel que $10 \log n = 10$, soit $\log n = 1$.

— $n = 10$ machines.

Ce qu'il faut en retenir.

— Doubler la source n'ajoute que 3 dB — une différence à peine perceptible.

— **Conséquence industrielle** : pour réduire un bruit d'atelier de 10 dB, il ne suffit pas d'arrêter une machine sur deux ; il faut diviser l'intensité par 10, c'est-à-dire arrêter 9 machines sur 10 ou traiter la source. C'est ce calcul qui justifie d'investir dans l'isolation plutôt que dans la réduction du nombre de machines.

Réponse. a) environ 3 dB · b) 10 machines.

Correction de l'exercice 9 - pH d'une solution

$$\text{a) } - \text{pH} = -\log(10^{-4}) = -(-4) = 4.$$

— La solution est acide (pH inférieur à 7).

$$\text{b) On résout } -\log[\text{H}^+] = 3, \text{ soit } \log[\text{H}^+] = -3.$$

$$- [\text{H}^+] = 10^{-3} \text{ mol/L}.$$

c) Diluer 100 fois divise la concentration par 100.

- Nouvelle concentration : $\frac{[H^+]}{100}$.
- Nouveau pH : $-\log\left(\frac{[H^+]}{100}\right) = -\log[H^+] + \log 100 = \text{pH} + 2$.
- **Le pH augmente de 2 unités**, quelle que soit la valeur de départ.
- **Traduction** : chaque division de la concentration par 10 ajoute exactement une unité de pH. Une unité de pH n'est donc jamais « un petit écart » : c'est un facteur 10 sur l'acidité.

Réponse. a) $\text{pH} = 4$ · b) 10^{-3} mol/L · c) le pH augmente de 2 unités.

Correction de l'exercice 10 - Atténuation dans une fibre

- a) - $\frac{P(20)}{P_0} = e^{-0,05 \times 20} = e^{-1} \approx 0,368$.
- Il reste environ 36,8 % de la puissance après 20 km.
- b) On résout $e^{-0,05x} = 0,5$.
- $-0,05x = -\ln 2$, donc $x = \frac{\ln 2}{0,05} = 20 \ln 2 \approx 13,86$ km.
- c) On résout $e^{-0,05x} = 0,01$.
- $-0,05x = \ln 0,01 = -\ln 100$, donc $x = \frac{\ln 100}{0,05} = 20 \ln 100 \approx 92,10$ km.
- **Contrôle par les demi-atténuations** : diviser par 100, c'est diviser par 2 un peu plus de 6 fois ($2^6 = 64$, $2^7 = 128$). Or $\frac{92,10}{13,86} \approx 6,64$. Cohérent.
 - **Conséquence technique** : c'est ce calcul qui fixe l'espacement des répéteurs optiques sur une liaison longue distance.

Réponse. a) environ 36,8 % · b) $20 \ln 2 \approx 13,86$ km · c) $20 \ln 100 \approx 92,10$ km.

Correction de l'exercice 11 - Un objectif de production

Mise en inéquation. La production du mois n vaut $4\,500 \times 1,025^n$.

- $4\,500 \times 1,025^n > 7\,000$, soit $1,025^n > \frac{7\,000}{4\,500} \approx 1,555\,6$.

Application du logarithme. Ici $\ln 1,025 \approx 0,024\,7$ est **positif** : le sens se conserve.

$$n > \frac{\ln 1,555\,6}{\ln 1,025} = \frac{0,441\,8}{0,024\,7} \approx 17,90$$

- Le premier entier convenable est $n = 18$.

Vérification.

- $4\,500 \times 1,025^{17} \approx 6\,847,3$ pièces : insuffisant.
- $4\,500 \times 1,025^{18} \approx 7\,018,5$ pièces : objectif atteint.
- **Interprétation** : il faut un an et demi de croissance à 2,5 % par mois. Une progression mensuelle qui paraît modeste multiplie tout de même la production par 1,56 en 18 mois.

Réponse. Au 18^e mois.

Correction de l'exercice 12 - Deux placements à comparer

a) **Placement A.**

$$- n_A = \frac{\ln 2}{\ln 1,04} = \frac{0,6931}{0,0392} \approx 17,67 \text{ ans, soit 18 ans.}$$

Placement B.

$$- n_B = \frac{\ln 2}{\ln 1,06} = \frac{0,6931}{0,0583} \approx 11,90 \text{ ans, soit 12 ans.}$$

— La règle des 70 donnerait 17,5 et 11,7 : très proche.

b) On cherche n tel que $C \times 1,06^n \geq 2 \times C \times 1,04^n$.

— On simplifie par $C > 0$, puis on divise par $1,04^n$:

$$\left(\frac{1,06}{1,04}\right)^n \geq 2$$

$$- \frac{1,06}{1,04} \approx 1,019231, \text{ dont le logarithme vaut environ } 0,019048.$$

$$n \geq \frac{\ln 2}{0,019048} \approx 36,39$$

— Il faut donc 37 ans.

— **Ce que révèle le calcul** : deux points d'écart de rendement suffisent à doubler l'écart de capital, mais il y faut une vie professionnelle entière. La différence entre 4 % et 6 % paraît faible sur un an, elle est considérable sur 37 ans.

Réponse. a) environ 17,67 ans et 11,90 ans · b) 37 ans.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver un taux

Mise en équation. Notons q le coefficient multiplicateur annuel.

$$- 12\,000 \times q^{10} = 18\,000, \text{ soit } q^{10} = \frac{18\,000}{12\,000} = 1,5.$$

Résolution par le logarithme.

$$- 10 \ln q = \ln 1,5, \text{ donc } \ln q = \frac{\ln 1,5}{10} = \frac{0,405465}{10} = 0,0405465.$$

$$- q = e^{0,0405465} \approx 1,04138.$$

Conclusion.

— Le taux annuel est $q - 1 \approx 0,04138$, soit environ 4,14 % **par an**.

Vérification.

$$- 12\,000 \times 1,04138^{10} \approx 18\,000. \text{ Correct.}$$

— **Erreur classique** : diviser la hausse totale par le nombre d'années, soit $\frac{50\%}{10} = 5\%$ par an. Ce serait faux : les hausses se **composent**, elles ne s'additionnent pas. Le vrai taux (4,14 %) est inférieur.

Réponse. Environ 4,14 % par an.

Correction de l'exercice 14 - Une échelle de magnitude

$$a) - \log E = 1,5 \times 6 + 4,8 = 9 + 4,8 = 13,8.$$

$$- \text{Donc } E = 10^{13,8} \approx 6,3 \times 10^{13} \text{ J.}$$

— C'est l'ordre de grandeur de l'énergie consommée par une ville moyenne pendant plusieurs jours.

b) On compare deux magnitudes consécutives.

$$- \text{Pour } M + 1 : \log E' = 1,5(M + 1) + 4,8 = \log E + 1,5.$$

— Donc $\log E' - \log E = 1,5$, c'est-à-dire $\log\left(\frac{E'}{E}\right) = 1,5$.

$$\frac{E'}{E} = 10^{1,5} \approx 31,6$$

- Une unité de magnitude supplémentaire multiplie l'énergie par environ 32.
- **Ce que le public ignore souvent** : un séisme de magnitude 7 n'est pas « un peu plus fort » qu'un magnitude 6 — il libère trente fois plus d'énergie. Deux unités d'écart, c'est un facteur 1 000.

Réponse. a) environ $6,3 \times 10^{13}$ J · b) par $10^{1,5} \approx 32$.

Correction de l'exercice 15 - Un modèle à valider

a) Le coefficient sur 10 ans vaut $1,03^{10}$.

- $1,03^{10} \approx 1,343\,92$, soit une hausse de 34,39 % et non 30 %.
- L'affirmation **sous-estime** la croissance : les hausses se composent, chaque année s'appliquant à une population déjà augmentée.

b) On résout $1,03^n \geq 1,3$.

- $n \ln 1,03 \geq \ln 1,3$, avec $\ln 1,03 \approx 0,029\,559$ positif.

$$n \geq \frac{\ln 1,3}{\ln 1,03} = \frac{0,262\,364}{0,029\,559} \approx 8,88$$

- Il faut donc 9 années, et non 10.

Vérification.

- $1,03^8 \approx 1,266\,8$: hausse de 26,7 %, insuffisante.
- $1,03^9 \approx 1,304\,8$: hausse de 30,5 %, atteinte.
- **Règle à retenir** : ne **jamais** multiplier un taux par une durée. L'erreur est faible sur de courtes périodes et de petits taux, mais elle croît vite — sur 30 ans à 3 %, l'addition annoncerait 90 % alors que la réalité est 143 %.

Réponse. a) +34,39 % · b) au bout de 9 ans.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dimensionner un traitement acoustique

a) **Écart à combler.** $92 - 85 = 7$ dB.

- Si I_1 et I_2 sont les intensités, $10 \log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = 7$, donc $\log\left(\frac{I_1}{I_2}\right) = 0,7$.

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{0,7} \approx 5,01$$

- Il faut diviser l'intensité par environ 5.

b) Chaque panneau multiplie l'intensité par 0,8. Avec n panneaux, elle est multipliée par $0,8^n$.

- On cherche $0,8^n \leq \frac{1}{5,01} \approx 0,199\,5$.
- $n \ln 0,8 \leq \ln 0,199\,5$, et $\ln 0,8 \approx -0,223\,1$ est **négalif** : le sens s'inverse.

$$n \geq \frac{\ln 0,199\,5}{\ln 0,8} = \frac{-1,612\,0}{-0,223\,1} \approx 7,23$$

- Il faut donc **8 panneaux**.

c) Avec 8 panneaux, l'intensité est multipliée par $0,8^8 \approx 0,167\,8$.

- Réduction en décibels : $-10 \log(0,1678) \approx 7,75$ dB.
- Niveau atteint : $92 - 7,75 \approx 84,25$ dB, bien sous les 85 dB requis.

d) Pour 80 dB, il faut gagner 12 dB.

- $0,8^n \leq 10^{-1,2} \approx 0,0631$, donc $n \geq \frac{\ln 0,0631}{\ln 0,8} \approx \frac{-2,7630}{-0,2231} \approx 12,38$, soit 13 **panneaux**.
- **Commentaire décisif** : passer de 85 à 80 dB, soit 5 dB de mieux, demande 5 panneaux supplémentaires — presque autant que les 8 premiers qui en avaient gagné 7,75. Chaque décibel gagné coûte de plus en plus cher.
- **Pourquoi** : l'effet des panneaux est **multiplicatif** et l'échelle est **logarithmique**. Les derniers décibels exigent de diviser encore une intensité déjà faible, ce qui demande toujours le même nombre de panneaux par décibel — mais sur une base de plus en plus réduite, donc pour un bénéfice acoustique perçu de plus en plus mince.

Réponse. a) par environ 5 · b) 8 panneaux · c) environ 84,25 dB · d) 13 panneaux au total.