

Plaquette 2 - Calcul avec ln : propriétés et simplifications

Fonction logarithme népérien — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition et valeurs.

— ln est définie sur $]0; +\infty[$ et c'est la **réci-proque** de l'exponentielle :

$$\ln(e^x) = x \quad (\text{tout } x) \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$$

— Valeurs de référence : $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln(e^n) = n$, $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Propriétés algébriques (pour $a > 0$ et $b > 0$).

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^n) = n \ln a \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

— **Valeurs usuelles à connaître** : $\ln 2 \approx 0,693$, $\ln 3 \approx 1,099$, $\ln 5 \approx 1,609$, $\ln 10 \approx 2,303$.

— **Signe** : $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$, $\ln 1 = 0$, $\ln x > 0$ pour $x > 1$.

— **Croissance** : ln est strictement croissante, donc $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ (avec a, b strictement positifs).

— **Piège permanent** : $\ln(a + b)$ ne se simplifie **pas**. Seuls les produits, quotients et puissances se transforment.

Correction de l'exercice 1 - Valeurs exactes

On utilise la propriété fondamentale $\ln(e^x) = x$.

a) - $\ln 1 = 0$, car $1 = e^0$.

— $\ln e = 1$, car $e = e^1$.

b) - $\ln(e^5) = 5$.

— $\ln(e^{-3}) = -3$.

c) - $\frac{1}{e} = e^{-1}$, donc $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

— $\sqrt{e} = e^{0,5}$, donc $\ln(\sqrt{e}) = 0,5$.

— **Ce qu'il faut voir** : ln « lit » l'exposant. Dès qu'une expression s'écrit comme une puissance de e, son logarithme est immédiat.

Réponse. a) 0 et 1 · b) 5 et -3 · c) -1 et 0,5.

Correction de l'exercice 2 - Regrouper en un seul logarithme

a) Une différence de logarithmes est le logarithme du **quotient**.

— $\ln 12 - \ln 3 = \ln\left(\frac{12}{3}\right) = \ln 4$.

b) Une somme de logarithmes est le logarithme du **produit**.

— $\ln 2 + \ln 50 = \ln(2 \times 50) = \ln 100$.

c) On commence par faire remonter le coefficient dans l'exposant.

— $2 \ln 3 = \ln(3^2) = \ln 9.$

— Puis $\ln 9 + \ln 2 = \ln 18.$

— **Contrôle numérique** : $2 \times 1,099 + 0,693 = 2,891$, et $\ln 18 \approx 2,890$. Cohérent.

— **Sens de lecture** : un coefficient devant $\ln$ devient un **exposant**, jamais un facteur à l'intérieur. Écrire $2 \ln 3 = \ln 6$ est faux.

Réponse. a) $\ln 4$ · b) $\ln 100$ · c) $\ln 18$.

Correction de l'exercice 3 - Exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$

a) $6 = 2 \times 3$, donc $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3.$

— Valeur : $0,693 + 1,099 = 1,792.$

b) $12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$, donc $\ln 12 = 2 \ln 2 + \ln 3.$

— Valeur : $2 \times 0,693 + 1,099 = 1,386 + 1,099 = 2,485.$

c) $\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2 - \ln 3.$

— Valeur : $0,693 - 1,099 = -0,406.$

— Le résultat est **négatif**, ce qui est cohérent : $\frac{2}{3} < 1$, et $\ln$ est négatif sur $]0; 1[$.

— **Méthode** : on décompose toujours le nombre en produit de puissances des bases connues, puis on applique les règles.

Réponse. a) $\ln 2 + \ln 3 \approx 1,792$ · b) $2 \ln 2 + \ln 3 \approx 2,485$ · c) $\ln 2 - \ln 3 \approx -0,406$.

Correction de l'exercice 4 - Simplifier des compositions

a) $\ln(e^{2x}) = 2x$, **pour tout réel** x .

— Aucune condition : e^{2x} est toujours strictement positif.

b) $e^{\ln(3x)} = 3x$, mais **seulement si** $3x > 0$, c'est-à-dire $x > 0$.

— Sans cette condition, $\ln(3x)$ n'existe pas.

c) On simplifie d'abord l'intérieur : $e^x \times e^3 = e^{x+3}.$

— Donc $\ln(e^{x+3}) = x + 3$, pour tout réel x .

— **Dissymétrie essentielle** : $\ln(e^x) = x$ est vrai partout, alors que $e^{\ln x} = x$ exige $x > 0$. Cette asymétrie est une source d'erreur constante et vaut des points au bac.

Réponse. a) $2x$ (tout x) · b) $3x$ pour $x > 0$ · c) $x + 3$ (tout x).

Correction de l'exercice 5 - Développer un logarithme

On applique successivement les règles du quotient, du produit et de la puissance.

Quotient.

$$\ln\left(\frac{x^2\sqrt{x}}{3}\right) = \ln(x^2\sqrt{x}) - \ln 3$$

Produit.

— $\ln(x^2\sqrt{x}) = \ln(x^2) + \ln(\sqrt{x}).$

Puissance et racine.

— $\ln(x^2) = 2 \ln x$ et $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x.$

Résultat.

$$\ln\left(\frac{x^2\sqrt{x}}{3}\right) = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln x - \ln 3 = \frac{5}{2}\ln x - \ln 3$$

— **Contrôle numérique** pour $x = 4$: l'expression de départ vaut

$$\ln\left(\frac{16 \times 2}{3}\right) = \ln\left(\frac{32}{3}\right) \approx 2,367, \text{ et l'expression finale } \frac{5}{2} \times 1,386 - 1,099 \approx 2,367.$$

Cohérent.

Réponse. $\frac{5}{2}\ln x - \ln 3$.

Correction de l'exercice 6 - Le piège de la somme

a) **Fausse.** $\ln 1 = 0$, donc le membre de droite vaut $\ln x$, alors que le membre de gauche vaut $\ln(x + 1) \neq \ln x$.

— Contre-exemple avec $x = 3$: $\ln 4 \approx 1,386$ à gauche, $\ln 3 \approx 1,099$ à droite.

— **Il n'existe aucune formule pour $\ln(a + b)$.** Le logarithme transforme les produits, pas les sommes.

b) **Vraie**, c'est la règle de la puissance. Pour $x > 1$, les deux membres sont bien définis.

— Contrôle avec $x = 3$: $\ln 9 \approx 2,197$ et $2\ln 3 \approx 2,197$. Cohérent.

c) **Fausse.** Le membre de gauche est un **quotient de logarithmes**, le membre de droite le **logarithme d'un quotient** : ce sont deux choses différentes.

— Contre-exemple avec $x = 8$: $\frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{2,079}{0,693} = 3$, alors que $\ln 4 \approx 1,386$.

— La bonne formule est $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2$, avec une **soustraction**.

Réponse. a) fausse · b) vraie · c) fausse : $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2$.

Correction de l'exercice 7 - Une somme télescopique

Une somme de logarithmes est le logarithme du produit : on regroupe tout.

$$\ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right)$$

Simplification du produit. Chaque numérateur s'annule avec le dénominateur précédent.

$$— \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{1}{5}.$$

Résultat.

$$— \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln 5 \approx -1,609.$$

— **Contrôle** : chaque terme est négatif (tous les quotients sont inférieurs à 1), donc la somme doit l'être aussi. Cohérent.

— **Nom de la technique** : on parle de somme **télescopique**. Elle est beaucoup plus rapide que de calculer les quatre logarithmes séparément, et elle donne une valeur **exacte**.

Réponse. $-\ln 5 \approx -1,609$.

Correction de l'exercice 8 - Conditions d'existence

Le logarithme n'existe que pour un argument **strictement positif**.

a) - $2x - 6 > 0$, soit $2x > 6$ et $x > 3$.

— Ensemble de définition : $]3; +\infty[$.

b) - $x^2 + 1 > 0$ pour **tout** réel x , puisque $x^2 \geq 0$.

— Ensemble de définition : $\mathbb{R}$.

c) Il faut que **les deux** logarithmes existent.

— $3 - x > 0$ donne $x < 3$; $x > 0$ donne $x > 0$.

— Les deux conditions ensemble : $0 < x < 3$, soit $]0; 3[$.

— **Réflexe de rédaction** : les conditions d'existence se déterminent **avant** toute simplification. Une équation en $\ln$ peut fournir des solutions qu'il faut ensuite écarter parce qu'elles sortent du domaine.

Réponse. a) $]3; +\infty[$ · b) $\mathbb{R}$ · c) $]0; 3[$.

Correction de l'exercice 9 - Deux expressions à ne pas confondre

Ensembles de définition.

— f : il faut $x^2 > 0$, soit $x \neq 0$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

— g : il faut $x > 0$. Donc g est définie sur $]0; +\infty[$ seulement.

Comparaison.

— Sur $]0; +\infty[$, les deux expressions coïncident : $\ln(x^2) = 2 \ln x$.

— Sur $]-\infty; 0[$, seule f existe. Par exemple $f(-3) = \ln 9 \approx 2,197$, alors que $g(-3)$ n'a aucun sens.

— **Formule correcte sur tout le domaine de f** : $\ln(x^2) = 2 \ln |x|$, avec une valeur absolue.

— **Portée du piège** : dans une étude de fonction, remplacer $\ln(x^2)$ par $2 \ln x$ revient à **amputer** le domaine de la moitié de ses valeurs. C'est une erreur qui fausse tout le tableau de variations.

Réponse. f est définie sur $\mathbb{R}^*$, g sur $]0; +\infty[$; elles coïncident seulement pour $x > 0$.

Correction de l'exercice 10 - Comparer des logarithmes

La fonction $\ln$ est strictement **croissante** : comparer des logarithmes revient à comparer leurs arguments.

Étape 1 — ranger les arguments.

— $0,5 < 1 < 2 < e < 7$, puisque $e \approx 2,718$.

Étape 2 — conclure.

$$\ln 0,5 < \ln 1 < \ln 2 < \ln e < \ln 7$$

Valeurs de contrôle.

— $\ln 0,5 \approx -0,693$; $\ln 1 = 0$; $\ln 2 \approx 0,693$; $\ln e = 1$; $\ln 7 \approx 1,946$.

— L'ordre est confirmé.

— **À remarquer** : $\ln 0,5 = -\ln 2$. Les logarithmes de deux nombres inverses sont opposés, ce qui donne la symétrie visible dans la liste.

Réponse. $\ln 0,5 < \ln 1 < \ln 2 < \ln e < \ln 7$.

Correction de l'exercice 11 - Une expression avec exponentielle et logarithme

Méthode 1 — développer d'abord.

- $\ln(xe^x) = \ln x + \ln(e^x) = \ln x + x$.
- Donc $A = \ln x + x - \ln x = x$.

Méthode 2 — regrouper en un quotient.

$$A = \ln\left(\frac{xe^x}{x}\right) = \ln(e^x) = x$$

- Les deux méthodes donnent $A = x$, pour tout $x > 0$.
- **Contrôle numérique** pour $x = 2$:
 $\ln(2e^2) - \ln 2 = \ln(14,778) - 0,693 \approx 2,693 - 0,693 = 2$. Cohérent.
- **Observation** : une expression compliquée mêlant $\ln$ et e se simplifie presque toujours radicalement. Il faut résister à l'envie de calculer et commencer par appliquer les règles.

Réponse. $A = x$.

Correction de l'exercice 12 - Retrouver un nombre

On utilise la réciproque : $\ln x = a$ équivaut à $x = e^a$ (avec $x > 0$).

a) - $x = e^2 \approx 7,389$.

b) - $x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

- Cohérent avec le signe : un logarithme négatif correspond à un nombre compris entre 0 et 1.
- c) On simplifie d'abord le second membre.
- $\ln 3 + \ln 5 = \ln 15$.
- Donc $\ln x = \ln 15$, et par stricte croissance de $\ln$, $x = 15$.
- **Deux techniques différentes** : en a) et b) on applique l'exponentielle, en c) on identifie directement les arguments. La seconde est toujours préférable quand elle est possible : elle donne une valeur **exacte** sans calculatrice.

Réponse. a) $e^2 \approx 7,389$ · b) $\frac{1}{e} \approx 0,368$ · c) 15.

Correction de l'exercice 13 - Le signe d'une expression

Annulation. $\ln x - 1 = 0$ équivaut à $\ln x = 1 = \ln e$, donc $x = e$.

Signe par croissance. $\ln$ étant strictement croissante :

- si $0 < x < e$, alors $\ln x < 1$, donc $f(x) < 0$;
- si $x > e$, alors $\ln x > 1$, donc $f(x) > 0$.

x	0	e	$+\infty$
signe de $f(x)$	-	0	+

- **Contrôle numérique** : $f(2) = 0,693 - 1 = -0,307 < 0$ et $f(5) = 1,609 - 1 = 0,609 > 0$. Cohérent, puisque $2 < e < 5$.
- **Méthode générale** : pour étudier le signe d'une expression contenant $\ln$, on écrit la constante sous forme $\ln$ (quelque chose), puis on compare les arguments.

Réponse. f est négative sur $]0; e[$, nulle en e , positive sur $]e; +\infty[$.

Correction de l'exercice 14 - Logarithme et échelle de puissance

a) **Facteur 10.** Alors $\frac{P_s}{P_e} = 10$.

$$- G = 10 \times \frac{\ln 10}{\ln 10} = 10 \times 1 = 10.$$

Facteur 100. Alors $\frac{P_s}{P_e} = 100 = 10^2$.

$$- \ln 100 = 2 \ln 10, \text{ donc } G = 10 \times \frac{2 \ln 10}{\ln 10} = 20.$$

b) **Division par 10.** Alors $\frac{P_s}{P_e} = \frac{1}{10}$.

$$- \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln 10, \text{ donc } G = 10 \times (-1) = -10.$$

— **Interprétation** : G est le gain en **décibels**. Multiplier la puissance par 10 ajoute 10 dB ; la multiplier par 100 en ajoute 20 — pas 100.

— **Pourquoi le logarithme** : il transforme des rapports multiplicatifs, qui couvrent des ordres de grandeur énormes, en une échelle **additive** lisible. C'est le même principe pour le pH et la magnitude d'un séisme.

Réponse. a) 10 dB puis 20 dB · b) -10 dB.

Correction de l'exercice 15 - Une identité à démontrer

On transforme chaque terme du membre de gauche.

Premier terme.

$$- \ln(x^3) = 3 \ln x, \text{ par la règle de la puissance.}$$

Second terme.

$$- \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x, \text{ donc } 3 \ln(\sqrt{x}) = \frac{3}{2} \ln x.$$

Différence.

$$\ln(x^3) - 3 \ln(\sqrt{x}) = 3 \ln x - \frac{3}{2} \ln x = \frac{6-3}{2} \ln x = \frac{3}{2} \ln x$$

— L'identité est démontrée pour tout $x > 0$.

— **Contrôle numérique** pour $x = 4$: à gauche, $\ln 64 - 3 \ln 2 \approx 4,159 - 2,079 = 2,080$; à droite, $1,5 \times 1,386 = 2,079$. Cohérent.

— **Rédaction attendue** : on part d'un membre et on le transforme jusqu'à l'autre. On ne « passe » pas des termes d'un côté à l'autre comme dans une équation, puisqu'il ne s'agit pas d'une équation à résoudre mais d'une identité à établir.

Réponse. $3 \ln x - \frac{3}{2} \ln x = \frac{3}{2} \ln x.$

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une chaîne de transformations

a) On applique la règle du quotient, puis celle de la composition.

$$f(x) = \ln(e^{2x}) - \ln x = 2x - \ln x$$

— Le premier terme se simplifie car $\ln(e^a) = a$ pour tout réel a .

b) - $f(1) = 2 \times 1 - \ln 1 = 2 - 0 = 2.$

— $f(e) = 2e - \ln e = 2e - 1 \approx 5,437 - 1 = 4,437.$

c) $f(x) = 2x$ s'écrit $2x - \ln x = 2x$.

— On simplifie par $2x$: $-\ln x = 0$, soit $\ln x = 0$.

— Donc $x = 1$, qui appartient bien à $]0; +\infty[$.

d) Pour $x \geq 1$, on compare les deux termes de $f(x) = 2x - \ln x$.

— D'une part $2x \geq 2$.

— D'autre part, on sait que $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ (le logarithme reste sous sa tangente en 1).

— Donc $f(x) = 2x - \ln x \geq 2x - (x - 1) = x + 1 \geq 2 > 0$.

— **Conclusion** : $f(x) > 0$ pour tout $x \geq 1$, et même $f(x) \geq 2$.

— **Contrôle** : $f(1) = 2$ (la borne est atteinte) et $f(10) = 20 - 2,303 \approx 17,70$. Cohérent.

— **Ce que l'exercice illustre** : la simplification du a) change tout. Sous sa forme initiale, f est difficile à étudier ; sous la forme $2x - \ln x$, tout devient immédiat.

Réponse. a) règle du quotient · b) $f(1) = 2$ et $f(e) = 2e - 1 \approx 4,437$ · c) $x = 1$ · d) $f(x) \geq x + 1 \geq 2 > 0$.