

Plaquette 4 – Dérivées, variations et tangentes avec $\ln$

Fonction logarithme népérien — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{sur }]0; +\infty[\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Opérations.

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- **Dérivées à connaître par cœur** : $(x \ln x)' = \ln x + 1$ et $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.
- **Méthode du signe** : réduire $f(x)$ au même dénominateur. Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur (x ou x^2) est **positif** : seul le numérateur décide.
- **Limites de référence** :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

- **Croissances comparées** : à l'infini, x l'emporte sur $\ln x$ — le logarithme croît très lentement.
- **Asymptote verticale** : l'axe des ordonnées ($x = 0$) est asymptote à la courbe de $\ln$.
- **Tangente** en a : $y = f(a)(x - a) + f(a)$.
- **Primitive** : une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est $\ln x$.

Correction de l'exercice 1 – Dérivées immédiates

On utilise $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

a) $f(x) = \frac{3}{x}$.

b) $g'(x) = \frac{3}{x} - 2$.

— On peut réduire au même dénominateur : $g'(x) = \frac{3 - 2x}{x}$.

c) $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, soit $h'(x) = \frac{x-1}{x^2}$ après réduction.

- **Pourquoi réduire** : sous la forme $\frac{3-2x}{x}$, le signe de g' se lit immédiatement — le dénominateur est positif, donc g' est du signe de $3 - 2x$. Sous la forme $\frac{3}{x} - 2$, il faudrait résoudre une inéquation.
- g est donc croissante sur $]0; 1,5]$ puis décroissante.

Réponse. a) $\frac{3}{x}$ · b) $\frac{3-2x}{x}$ · c) $\frac{x-1}{x^2}$.

Correction de l'exercice 2 - Un logarithme composé

On applique $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

a) $u(x) = 2x + 1$, donc $u'(x) = 2$.

$$f(x) = \frac{2}{2x+1}$$

— Intervalle : il faut $2x + 1 > 0$, soit $x > -\frac{1}{2}$. Sur cet intervalle, f est positive : f est croissante.

b) $u(x) = x^2 + 1$, donc $u'(x) = 2x$.

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

— Intervalle : $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel, donc g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

— Signe : le dénominateur est positif, donc g' est du signe de $2x$. g décroît sur $]-\infty; 0]$ et croît sur $[0; +\infty[$, avec un minimum $g(0) = \ln 1 = 0$.

— **Erreur à éviter** : écrire $f'(x) = \frac{1}{2x+1}$ en oubliant le u' . La dérivée de l'argument se place **au numérateur**.

Réponse. a) $\frac{2}{2x+1}$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ · b) $\frac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 - Un produit à connaître

Dérivée. Produit avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$.

— $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

— $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$.

Signe de f' .

— $\ln x + 1 > 0$ équivaut à $\ln x > -1 = \ln(e^{-1})$, soit $x > \frac{1}{e}$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	—	0	+

Minimum.

— $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1) = -\frac{1}{e} \approx -0,368$.

— En 0^+ , $x \ln x$ tend vers 0 (croissances comparées) : la courbe part de l'origine, descend jusqu'à $-0,368$ vers $x \approx 0,368$, puis remonte.

— **Simplification remarquable** : le terme $x \times \frac{1}{x}$ se réduit à 1. C'est ce qui rend cette dérivée si simple, et elle revient constamment.

Réponse. $f(x) = \ln x + 1$; minimum $-\frac{1}{e} \approx -0,368$ en $x = \frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 4 - Un quotient à connaître

Dérivée. Quotient avec $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$.

— $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$.

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Signe. Sur $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$: le signe est celui de $1 - \ln x$.

— $1 - \ln x > 0$ équivaut à $\ln x < 1$, soit $x < e$.

x	0	e	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	0	−

Maximum.

— $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

— **Comportement aux bornes** : en 0^+ , $\ln x$ tend vers $-\infty$ et x vers 0^+ , donc $f(x)$ tend vers $-\infty$. En $+\infty$, $f(x)$ tend vers 0 par croissances comparées : $y = 0$ est asymptote horizontale.

— **Conséquence célèbre** : ce maximum en $x = e$ explique que $e^\pi > \pi^e$, et plus généralement que la base e soit optimale dans de nombreux problèmes de codage.

Réponse. $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; maximum $\frac{1}{e} \approx 0,368$ en $x = e$.

Correction de l'exercice 5 - Une tangente simple

Les deux valeurs.

— $f(1) = \ln 1 = 0$.

— $f(x) = \frac{1}{x}$, donc $f(1) = 1$.

Équation.

$$y = f(1)(x - 1) + f(1) = 1 \times (x - 1) + 0$$

— La tangente a pour équation $y = x - 1$.

Interprétation.

— Elle passe par le point $(1; 0)$, où la courbe coupe l'axe des abscisses, avec un coefficient directeur de 1.

— **Propriété importante** : la courbe de $\ln$ est **toujours en dessous** de cette tangente, c'est-à-dire $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$. On le démontre en étudiant $x - 1 - \ln x$, dont la dérivée $\frac{x-1}{x}$ s'annule en 1 avec un minimum nul.

— Cette inégalité sert constamment pour majorer un logarithme.

Réponse. $y = x - 1$.

Correction de l'exercice 6 - Une tangente passant par l'origine

Les deux valeurs.

— $f(e) = \ln e = 1$.

— $f(e) = \frac{1}{e}$.

Équation.

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{x}{e} - 1 + 1 = \frac{x}{e}$$

Passage par l'origine.

— Pour $x = 0$, on obtient $y = 0$: la tangente passe bien par l'origine du repère.

- **Ce que cela signifie** : la droite issue de l'origine de coefficient directeur $\frac{1}{e} \approx 0,368$ est tangente à la courbe de $\ln$, et c'est la **seule** dans ce cas.
- **Lien avec l'exercice du maximum** : la tangente en a passe par l'origine si et seulement si $\frac{\ln a}{a} = \frac{1}{a}$... c'est-à-dire $\ln a = 1$, donc $a = e$. On retrouve la valeur qui maximisait $\frac{\ln x}{x}$: ce n'est pas un hasard, les deux problèmes sont le même.

Réponse. $y = \frac{x}{e}$, qui passe par l'origine.

Correction de l'exercice 7 - Un minimum classique

a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

- Réduction au même dénominateur :

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

- b) Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur x est **positif** : le signe est celui de $x - 1$.

x	0	1	$+\infty$
signe de $f(x)$	-	0	+

- f décroît sur $]0; 1]$, croît sur $[1; +\infty[$.
- Minimum en $x = 1$: $f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.
- **Conséquence** : $x - \ln x \geq 1$ pour tout $x > 0$, donc $\ln x \leq x - 1$. C'est exactement l'inégalité de la tangente, redémontrée autrement.
- **Comportement aux bornes** : en 0^+ , $-\ln x$ tend vers $+\infty$ donc f aussi ; en $+\infty$, x l'emporte sur $\ln x$ et f tend vers $+\infty$. La fonction est bien minimale au milieu.

Réponse. a) $\frac{x-1}{x}$ · b) minimum $f(1) = 1$.

Correction de l'exercice 8 - Un maximum avec un logarithme

a) $f(x) = \frac{2}{x} - 1$.

- Réduction : $f(x) = \frac{2-x}{x}$.

- b) Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur est positif : le signe est celui de $2 - x$.

x	0	2	$+\infty$
signe de $f(x)$	+	0	-

- f croît sur $]0; 2]$, puis décroît : elle admet un **maximum** en $x = 2$.

$$f(2) = 2 \ln 2 - 2 + 3 = 2 \ln 2 + 1$$
- Valeur approchée : $2 \times 0,6931 + 1 \approx 2,386$.
- **Contrôle numérique** : $f(1) = 0 - 1 + 3 = 2$ et $f(4) = 2 \ln 4 - 4 + 3 \approx 2,773 - 1 = 1,773$. Les deux sont bien inférieurs à 2,386.
- **Forme de la réponse** : la valeur exacte $2 \ln 2 + 1$ est ce que le barème attend. L'arrondi la complète, il ne la remplace pas.

Réponse. a) $\frac{2-x}{x}$ · b) maximum $2 \ln 2 + 1 \approx 2,386$ en $x = 2$.

Correction de l'exercice 9 - Un produit avec un carré

Produit avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln x$.

- $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.
- $f(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$.

Factorisation par x , qui est strictement positif sur l'intervalle.

$$f(x) = x(2 \ln x + 1)$$

Signe.

- $x > 0$, donc le signe est celui de $2 \ln x + 1$.
- $2 \ln x + 1 > 0$ équivaut à $\ln x > -\frac{1}{2}$, soit $x > e^{-0,5} \approx 0,607$.
- f décroît sur $]0; e^{-0,5}]$ puis croît.
- Minimum : $f(e^{-0,5}) = e^{-1} \times (-0,5) = -\frac{1}{2e} \approx -0,184$.
- **Simplification à repérer** : $x^2 \times \frac{1}{x} = x$. Le carré se simplifie toujours partiellement avec le $\frac{1}{x}$ de la dérivée du logarithme.

Réponse. $f(x) = x(2 \ln x + 1)$.

Correction de l'exercice 10 - Les limites aux bornes

- a) - $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$: la droite $x = 0$ est **asymptote verticale**.
 — $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, mais **très lentement** : il faut $x \approx 22\,026$ pour atteindre $\ln x = 10$.
 b) Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. La croissance comparée tranche :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

- Autrement dit, x l'emporte largement sur $\ln x$.

- c) Forme indéterminée $0 \times \infty$. Le cours donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

- Ici c'est x qui l'emporte encore, en écrasant le $-\infty$ du logarithme.
- **Règle à retenir** : entre une puissance de x et $\ln x$, c'est **toujours la puissance qui gagne** — aux deux bornes. C'est la situation symétrique de l'exponentielle, qui, elle, gagne toujours.

Réponse. a) $-\infty$ et $+\infty$ · b) 0 · c) 0 .

Correction de l'exercice 11 - Signe et variations d'un quotient

- a) Sur $]0; +\infty[$, le dénominateur x est strictement **positif**.

- Le signe de f est donc celui du numérateur $\ln x - 2$.
- $\ln x - 2 > 0$ équivaut à $\ln x > 2 = \ln(e^2)$, soit $x > e^2$.

x	0	e^2	$+\infty$
signe de $f(x)$	—	0	+

- b) $f(x) = 0$ si et seulement si le numérateur s'annule (le dénominateur ne s'annulant jamais sur l'intervalle).

- $\ln x - 2 = 0$ donne $x = e^2 \approx 7,389$.
- **Méthode systématique pour un quotient** : sur $]0; +\infty[$, le dénominateur en x ou x^2 est toujours positif. Toute l'étude de signe se ramène au numérateur — c'est ce qui rend ces exercices rapides une fois le réflexe acquis.

Réponse. a) négative sur $]0; e^2[$, positive après $\cdot$ b) $x = e^2 \approx 7,389$.

Correction de l'exercice 12 - Une intégrale avec $\ln$

Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est $\ln x$.

a) **Calcul.**

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

— L'aire sous l'hyperbole entre 1 et e vaut exactement 1 unité d'aire : c'est ce qui **définit** le nombre e .

b) La constante 3 se sort de l'intégrale.

$$\int_1^4 \frac{3}{x} dx = 3[\ln x]_1^4 = 3(\ln 4 - 0) = 3 \ln 4$$

— Valeur approchée : $3 \times 1,3863 \approx 4,159$.

— On peut aussi écrire $3 \ln 4 = \ln(4^3) = \ln 64$, ce qui donne la même valeur.

— **Restriction importante** : cette primitive ne vaut que sur $]0; +\infty[$. Une intégrale de $\frac{1}{x}$ dont les bornes encadrent 0 n'a aucun sens.

Réponse. a) 1 $\cdot$ b) $3 \ln 4 = \ln 64 \approx 4,159$.

Correction de l'exercice 13 - Comparer deux croissances

Lecture du tableau.

— De $x = 1$ à $x = 10\,000$, l'argument est multiplié par 10 000.

— $\sqrt{x}$ passe de 1 à 100 : multiplié par 100.

— $\ln x$ passe de 0 à 9,21 : il gagne moins de 10 unités.

Conclusion.

— Le logarithme croît **beaucoup plus lentement** que la racine carrée, elle-même plus lente que x .

— Chaque fois que x est multiplié par 10, $\ln x$ n'augmente que de $\ln 10 \approx 2,30$ — une progression **additive** constante, quelle que soit la taille de x .

— **C'est toute l'utilité du logarithme** : il compresse des échelles gigantesques. Passer de 1 à un milliard ne fait varier $\ln x$ que de 0 à 20,7. C'est pourquoi il sert à définir les décibels, le pH et l'échelle de Richter.

— **Conséquence mathématique** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, comme $\frac{\ln x}{x}$.

Réponse. Le logarithme croît très lentement : multiplier x par 10 n'ajoute que $\ln 10 \approx 2,30$.

Correction de l'exercice 14 - Une fonction à deux logarithmes

a) Une différence de logarithmes est le logarithme du quotient.

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Signe. Pour $x > 0$, on a $x < x + 1$, donc $0 < \frac{x}{x+1} < 1$.

— Or $\ln$ est **négatif** sur $]0; 1[$.

— Donc $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

b) On dérive la forme initiale, plus simple que le quotient.

$$- f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

— Réduction au même dénominateur $x(x+1)$:

$$f(x) = \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

— Sur $]0; +\infty[$, ce quotient est **strictement positif** : f est croissante.

— **Cohérence d'ensemble** : f est négative et croissante, et $\frac{x}{x+1}$ tend vers 1 quand x grandit, donc $f(x)$ tend vers $\ln 1 = 0$. La courbe monte vers l'axe des abscisses sans l'atteindre.

— **Choix de la forme** : on utilise la forme développée pour **dériver** et la forme factorisée pour **le signe**. Chaque écriture a son usage.

Réponse. a) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$ · b) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} > 0$.

Correction de l'exercice 15 - Retrouver un coefficient

Traduction de la condition. Une tangente horizontale signifie que la dérivée s'annule.

$$- f(3) = 0.$$

Calcul de la dérivée.

$$- f(x) = \frac{a}{x} + 1.$$

Résolution.

$$- f(3) = \frac{a}{3} + 1 = 0.$$

$$- \frac{a}{3} = -1, \text{ donc } a = -3.$$

Vérification.

$$- \text{Avec } a = -3 : f(x) = -3 \ln x + x \text{ et } f'(x) = -\frac{3}{x} + 1 = \frac{x-3}{x}.$$

$$- f(3) = 0 : \text{ la tangente est bien horizontale en } x = 3.$$

— De plus f' change de signe en 3 (négative avant, positive après) : il s'agit d'un **minimum**, de valeur $f(3) = 3 - 3 \ln 3 \approx 3 - 3,296 \approx -0,296$.

— **Méthode générale** : « tangente horizontale en a » se traduit toujours par l'équation $f'(a) = 0$, qu'on résout en le paramètre cherché.

Réponse. $a = -3$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude complète

a) Quotient avec $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x^2$.

$$- u'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } v'(x) = 2x.$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4}$$

— On factorise le numérateur par x , puis on simplifie :

$$f(x) = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

b) Sur $]0; +\infty[$, $x^3 > 0$: le signe est celui de $1 - 2 \ln x$.

$$- 1 - 2 \ln x > 0 \text{ équivaut à } \ln x < \frac{1}{2}, \text{ soit } x < e^{0,5} = \sqrt{e} \approx 1,649.$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	–

Maximum en $x = \sqrt{e}$:

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\ln(e^{0,5})}{(e^{0,5})^2} = \frac{0,5}{e} = \frac{1}{2e} \approx 0,184$$

c) Le dénominateur x^2 est positif : f est du signe de $\ln x$.

- f est négative sur $]0; 1[$, nulle en $x = 1$, positive sur $]1; +\infty[$.
- La courbe coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.

d) **Allure.**

- Partant de $-\infty$ en 0^+ , la courbe monte, coupe l'axe des abscisses en $x = 1$, atteint son maximum $\frac{1}{2e} \approx 0,184$ en $x = \sqrt{e} \approx 1,649$, puis redescend lentement vers 0.
- La droite $x = 0$ est **asymptote verticale**, la droite $y = 0$ **asymptote horizontale** en $+\infty$, approchée par au-dessus.
- **Contrôle numérique** : $f(1) = 0$, $f(2) = \frac{0,693}{4} \approx 0,173$, $f(5) = \frac{1,609}{25} \approx 0,064$. Le maximum se situe bien entre 1 et 2, et la décroissance ensuite est lente — c'est la signature d'un logarithme divisé par une puissance.

Réponse. a) $\frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$ · b) maximum $\frac{1}{2e} \approx 0,184$ en $\sqrt{e}$ · c) du signe de $\ln x$, la courbe coupe l'axe en $x = 1$ · d) montée depuis $-\infty$, maximum, puis décroissance lente vers 0.