

Plaquette 3 – Équations et inéquations avec $\ln$

Fonction logarithme népérien — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Résoudre avec $\ln$.

- **Équation de base** : pour $k > 0$,

$$e^x = k \Leftrightarrow x = \ln k \quad \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$$

- **Identification** : $\ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B$, à condition que $A > 0$ et $B > 0$.

- **Exponentielle de base a** (avec $a > 0$ et $a \neq 1$) :

$$a^x = k \Leftrightarrow x \ln a = \ln k \Leftrightarrow x = \frac{\ln k}{\ln a}$$

- **Inéquations** : $\ln$ est strictement croissante, donc $\ln A < \ln B \Leftrightarrow A < B$ (arguments positifs), et $e^x < k \Leftrightarrow x < \ln k$.
- **⚠ Le piège du signe** : $\ln q < 0$ dès que $0 < q < 1$. Diviser une inégalité par $\ln q$ **inverse** alors le sens. C'est le cas de tous les problèmes de décroissance.
- **Conditions d'existence** : on les écrit **avant** de résoudre, et on écarte à la fin toute solution qui n'y appartient pas.
- **Changement de variable** : dans une équation en $(\ln x)^2$ et $\ln x$, on pose $X = \ln x$ (sans contrainte de signe sur X), puis on revient par $x = e^X$.

Correction de l'exercice 1 - Deux équations immédiates

a) On applique l'exponentielle aux deux membres.

- $x = e^3 \approx 20,086$.

- Condition d'existence : $x > 0$, bien vérifiée.

b) On applique le logarithme aux deux membres, ce qui est licite car $7 > 0$.

- $x = \ln 7 \approx 1,946$.

Contrôle.

- Pour a) : $\ln(e^3) = 3$. Correct.

- Pour b) : $e^{\ln 7} = 7$. Correct.

- **Valeur exacte contre valeur approchée** : la réponse attendue est e^3 et $\ln 7$.
L'arrondi ne vient qu'en complément, jamais à la place.

Réponse. a) $x = e^3 \approx 20,086$ · b) $x = \ln 7 \approx 1,946$.

Correction de l'exercice 2 - Une équation avec une condition

Condition d'existence. Il faut $2x - 1 > 0$, soit $x > \frac{1}{2}$.

Résolution. On écrit $0 = \ln 1$, puis on identifie les arguments.

- $\ln(2x - 1) = \ln 1$ donne $2x - 1 = 1$.

- $2x = 2$, donc $x = 1$.

Vérification de la condition.

- $1 > \frac{1}{2}$: la solution est acceptable.
- Contrôle direct : $\ln(2 \times 1 - 1) = \ln 1 = 0$. Correct.
- **Rédaction attendue** : la condition d'existence s'écrit **en premier**, et on revient dessus à la fin. Un correcteur retire des points pour une solution juste mais non validée.

Réponse. $x = 1$.

Correction de l'exercice 3 - Une somme de logarithmes

Conditions d'existence. Il faut $x > 0$ et $x - 3 > 0$, donc $x > 3$.

Résolution. On regroupe le membre de gauche en un seul logarithme.

- $\ln(x(x - 3)) = \ln 4$.
- Par identification : $x(x - 3) = 4$, soit $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Factorisation. On cherche deux nombres de somme 3 et de produit -4 : ce sont 4 et -1 .

- $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$, vérifié par développement.
- Les racines sont $x = 4$ et $x = -1$.

Retour aux conditions.

- $x = -1$ ne vérifie pas $x > 3$: elle est **écartée**.
- $x = 4$ convient : c'est l'unique solution.
- Contrôle : $\ln 4 + \ln 1 = \ln 4 + 0 = \ln 4$. Correct.
- **Leçon** : l'équation algébrique a deux solutions, l'équation logarithmique une seule. C'est précisément pour cela qu'on pose les conditions d'existence.

Réponse. $x = 4$.

Correction de l'exercice 4 - Une exponentielle composée

On applique le logarithme aux deux membres — licite car $5 > 0$.

- $\ln(e^{2x-1}) = \ln 5$, soit $2x - 1 = \ln 5$.

Résolution.

- $2x = 1 + \ln 5$.

$$x = \frac{1 + \ln 5}{2}$$

- Valeur approchée : $\frac{1 + 1,6094}{2} \approx 1,305$.

Contrôle.

- $2 \times 1,305 - 1 = 1,610 \approx \ln 5$, et $e^{1,610} \approx 5$. Correct.
- **Piège fréquent** : écrire $x = \frac{\ln 5}{2} + 1$. La division par 2 porte sur **tout** le numérateur $1 + \ln 5$, pas seulement sur $\ln 5$.

Réponse. $x = \frac{1 + \ln 5}{2} \approx 1,305$.

Correction de l'exercice 5 - Une culture qui triple chaque heure

On cherche x tel que $3^x = 20$. Les deux membres sont strictement positifs : on leur applique le logarithme, puis on fait descendre l'exposant avec la règle $\ln(a^n) = n \ln a$.

$$x \ln 3 = \ln 20 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx \frac{2,9957}{1,0986} \approx 2,727$$

La culture a été multipliée par 20 au bout d'environ 2,727 heures, soit à peu près 2 h 44 min.

Contrôle : $3^2 = 9$ et $3^3 = 27$, donc la solution est entre 2 et 3, plus proche de 3.

Attention, $\frac{\ln 20}{\ln 3}$ n'est pas $\ln \frac{20}{3} \approx 1,897$: un quotient de logarithmes ne se simplifie pas.

Réponse. Au bout de $x = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,727$ heures.

Correction de l'exercice 6 - Un changement de variable

Changement de variable. On pose $X = \ln x$. Contrairement au cas de l'exponentielle, X peut prendre **n'importe quelle** valeur réelle.

— L'équation devient $X^2 - 3X + 2 = 0$.

Résolution en X . On cherche deux nombres de somme 3 et de produit 2 : ce sont 1 et 2.

— $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$.

— Donc $X = 1$ ou $X = 2$.

Retour à x .

— $\ln x = 1$ donne $x = e \approx 2,718$.

— $\ln x = 2$ donne $x = e^2 \approx 7,389$.

— Les deux valeurs sont strictement positives : elles conviennent toutes les deux.

Contrôle pour $x = e^2$: $(2)^2 - 3 \times 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$. Correct.

— **Différence avec l'exponentielle** : en posant $X = e^x$, il faudrait écarter les racines négatives. Avec $X = \ln x$, aucune racine n'est à écarter.

Réponse. $x = e$ et $x = e^2$.

Correction de l'exercice 7 - Une inéquation simple

Condition d'existence. $x > 0$.

Résolution. On écrit $2 = \ln(e^2)$, puis on compare les arguments — $\ln$ étant croissante, le sens se conserve.

— $\ln x < \ln(e^2)$ donne $x < e^2$.

Intersection avec la condition.

— $0 < x < e^2 \approx 7,389$.

— L'ensemble des solutions est $]0; e^2[$.

— **Contrôle** : $\ln 5 \approx 1,609 < 2$ (donc 5 est solution) et $\ln 10 \approx 2,303 > 2$ (donc 10 ne l'est pas). Cohérent avec $e^2 \approx 7,39$.

— **La borne de gauche compte** : oublier $x > 0$ conduirait à écrire $]-\infty; e^2[$, qui contient des valeurs où $\ln x$ n'existe même pas.

Réponse. $]0; e^2[$.

Correction de l'exercice 8 - Une inéquation avec condition

Condition d'existence. $x - 1 > 0$, soit $x > 1$.

Résolution. On écrit $1 = \ln e$ et on compare les arguments.

— $\ln(x - 1) \geq \ln e$ donne $x - 1 \geq e$.

— Donc $x \geq 1 + e \approx 3,718$.

Intersection avec la condition.

- $1 + e > 1$: la condition est automatiquement vérifiée.
- L'ensemble des solutions est $[1 + e; +\infty[$.
- **Contrôle** : pour $x = 4$, $\ln 3 \approx 1,099 \geq 1$. Correct. Pour $x = 3$, $\ln 2 \approx 0,693 < 1$: exclu, comme prévu.

Réponse. $x \geq 1 + e \approx 3,718$.

Correction de l'exercice 9 - Le piège du logarithme négatif

On applique le logarithme aux deux membres (arguments strictement positifs), en conservant le sens puisque $\ln$ est croissante.

- $n \ln 0,85 < \ln 0,1$.

△ **Attention** : $0,85 < 1$, donc $\ln 0,85 \approx -0,1625$ est **négatif**. Diviser par ce nombre **inverse** l'inégalité.

$$n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,85}$$

- $\frac{-2,3026}{-0,1625} \approx 14,168$.
- Comme n est entier, la plus petite valeur convenable est $n = 15$.

Vérification.

- $0,85^{14} \approx 0,103 > 0,1$: insuffisant.
- $0,85^{15} \approx 0,087 < 0,1$: convient.
- **L'erreur à ne jamais commettre** : garder le sens $<$ et conclure $n < 14,17$, donc $n \leq 14$. Ce serait l'exact contraire de la réalité. Dans **tout** problème de décroissance, le logarithme de la raison est négatif.

Réponse. $n \geq 15$.

Correction de l'exercice 10 - Un seuil de décroissance exponentielle

On applique le logarithme aux deux membres, en conservant le sens.

- $-0,3t \leq \ln 0,05$.

Division par $-0,3$, qui est négatif : l'inégalité **change de sens**.

$$t \geq \frac{\ln 0,05}{-0,3} = \frac{-2,9957}{-0,3} \approx 9,986$$

- L'ensemble des solutions est $[9,986; +\infty[$, soit environ $t \geq 10$.

Vérification.

- $e^{-0,3 \times 10} = e^{-3} \approx 0,0498 \leq 0,05$. Correct.
- $e^{-0,3 \times 9} \approx 0,067 > 0,05$: exclu, comme prévu.
- **Autre écriture** : $\frac{\ln 0,05}{-0,3} = \frac{-\ln 0,05}{0,3} = \frac{\ln 20}{0,3}$, puisque $-\ln 0,05 = \ln\left(\frac{1}{0,05}\right) = \ln 20$.
Cette forme évite de manipuler deux signes moins.

Réponse. $t \geq \frac{\ln 20}{0,3} \approx 9,99$.

Correction de l'exercice 11 - Un capital à faire croître**Mise en inéquation.**

- $5\,000 \times 1,035^n > 8\,000$, soit $1,035^n > 1,6$.

Application du logarithme.

- $n \ln 1,035 > \ln 1,6$.
- Ici $1,035 > 1$, donc $\ln 1,035 \approx 0,0344$ est **positif** : le sens de l'inégalité se conserve.

$$n > \frac{\ln 1,6}{\ln 1,035} = \frac{0,4700}{0,0344} \approx 13,66$$

- n étant entier, il faut $n = 14$ années.

Vérification.

- $5\,000 \times 1,035^{13} \approx 7\,819,78$ € : insuffisant.
- $5\,000 \times 1,035^{14} \approx 8\,093,47$ € : dépassé.
- **Comparaison des deux cas** : ici la raison est supérieure à 1, son logarithme est positif et le sens se conserve. Dans l'exercice précédent, la raison était inférieure à 1 et tout s'inversait. C'est **le signe de $\ln q$** qui décide, rien d'autre.

Réponse. 14 années.

Correction de l'exercice 12 - Un temps de doublement

Mise en inéquation. Si P_0 est la population initiale, elle vaut $P_0 \times 1,02^n$ au bout de n ans.

- On cherche $P_0 \times 1,02^n \geq 2P_0$, soit $1,02^n \geq 2$ après simplification par $P_0 > 0$.
- La population initiale **disparaît** : le temps de doublement n'en dépend pas.

Résolution.

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,02} = \frac{0,6931}{0,0198} \approx 35,00$$

- Le calcul donne 35,003, donc il faut $n = 36$ années pour dépasser **strictement** le double.
- À $n = 35$, on a $1,02^{35} \approx 1,9999$: tout juste en dessous.

Repère utile.

- Le produit « taux $\times$ durée » vaut ici $2 \times 35 = 70$. C'est la **règle des 70** : un capital croissant de $t\%$ par an double en environ $\frac{70}{t}$ années.
- Cette règle vient de $\ln 2 \approx 0,693 \approx \frac{69,3}{100}$, et elle est excellente pour les petits taux.

Réponse. Environ 35 ans (36 pour dépasser strictement le double).

Correction de l'exercice 13 - Une équation à vérifier**Vérification de la résolution algébrique.**

- $\ln(x(x-2)) = \ln 3$ donne $x^2 - 2x = 3$, soit $x^2 - 2x - 3 = 0$.
- $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$, donc les racines sont bien 3 et -1.
- L'algèbre est **juste**.

Vérification des conditions d'existence.

- Il faut $x > 0$ et $x - 2 > 0$, donc $x > 2$.
- $x = 3$ convient ($3 > 2$).
- $x = -1$ ne convient **pas** : ni $\ln(-1)$ ni $\ln(-3)$ n'existent.

Conclusion. La réponse est **incomplète** : l'unique solution est $x = 3$.

- Contrôle : $\ln 3 + \ln 1 = \ln 3 + 0 = \ln 3$. Correct.

- **Ce que cela enseigne** : une équation logarithmique se résout en trois temps — conditions d'existence, résolution algébrique, **retour** aux conditions. Sauter la troisième étape produit des solutions fantômes.

Réponse. Non : $x = -1$ est à écarter, la seule solution est $x = 3$.

Correction de l'exercice 14 - L'intersection de deux courbes exponentielles

Les courbes se coupent aux points d'abscisse x telle que $f(x) = g(x)$, soit $e^{3x} = 2^{x+1}$. Les deux membres sont strictement positifs : on applique le logarithme, puis on fait descendre les exposants.

$$3x = (x + 1) \ln 2 \Leftrightarrow 3x - x \ln 2 = \ln 2 \Leftrightarrow x(3 - \ln 2) = \ln 2$$

Comme $3 - \ln 2 \neq 0$, on obtient $x = \frac{\ln 2}{3 - \ln 2} \approx \frac{0,6931}{2,3069} \approx 0,300$.

Contrôle : $e^{0,9} \approx 2,460$ et $2^{1,3} \approx 2,462$, égaux aux arrondis près. Le logarithme ramène l'équation à une équation du premier degré.

Réponse. $x = \frac{\ln 2}{3 - \ln 2} \approx 0,300$.

Correction de l'exercice 15 - Un seuil entier avec deux suites

Mise en inéquation.

- $200 \times 1,04^n > 350 \times 1,01^n$.
- On divise par $1,01^n$, strictement positif :

$$200 \times \left(\frac{1,04}{1,01} \right)^n > 350$$

- $\frac{1,04}{1,01} \approx 1,029\,703$, et l'inéquation devient $1,029\,703^n > 1,75$.

Application du logarithme. La base est supérieure à 1, son logarithme est positif : le sens se conserve.

$$n > \frac{\ln 1,75}{\ln 1,029\,703} = \frac{0,559\,6}{0,029\,3} \approx 19,12$$

- Le premier entier convenable est $n = 20$.

Vérification.

- $n = 19$: A donne $200 \times 1,04^{19} \approx 421,4$ et B $350 \times 1,01^{19} \approx 422,8$. B est encore devant.
- $n = 20$: A donne $\approx 438,2$ et B $\approx 427,1$. A passe devant.
- **Technique clé** : ramener **deux** suites géométriques à **une seule**, en divisant par l'une d'elles. On retombe sur une inéquation standard.

Réponse. Au mois $n = 20$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : durée de vie d'un filtre

a) - $E(0) = 95 \times 1 = 95\%$.

- $E(10) = 95 \times 0,97^{10} \approx 95 \times 0,7374 \approx 70,1\%$.

b) On résout $95 \times 0,97^t < 70$, soit $0,97^t < \frac{70}{95}$ $\approx 0,7368$.

- On applique le logarithme : $t \ln 0,97 < \ln 0,7368$.
- $\ln 0,97 \approx -0,03046$ est **négligé** : la division inverse le sens.

$$t > \frac{\ln 0,7368}{\ln 0,97} = \frac{-0,3054}{-0,03046} \approx 10,03$$

- Le remplacement intervient donc à la **onzième semaine**.
 - Cohérent avec a) : à 10 semaines, l'efficacité est encore de 70,1 %, tout juste au-dessus du seuil.
 - c) Six mois représentent environ 26 semaines.
 - $E(26) = 95 \times 0,97^{26} \approx 95 \times 0,45297 \approx 43,0\%$, très en dessous du seuil de 70 %.
 - L'annonce est donc **incompatible** avec le modèle : le filtre ne tient qu'un peu plus de 10 semaines, soit environ deux mois et demi.
 - d) On cherche la raison q telle que $95q^{26} = 70$.
 - $q^{26} = \frac{70}{95} \approx 0,7368$.
 - $26 \ln q = \ln 0,7368 \approx -0,3054$, donc $\ln q \approx -0,01175$.
 - $q = e^{-0,01175} \approx 0,9883$.
 - Il faudrait donc une décroissance de 1,17 % **par semaine** au lieu de 3 % — soit une perte d'efficacité près de trois fois plus lente.
 - **Conclusion pour l'ingénieur** : l'écart entre l'annonce commerciale et le modèle est considérable. Soit la décroissance réelle est bien plus lente que 3 % par semaine, soit le seuil retenu par le fabricant est inférieur à 70 %. Le calcul permet de poser la question précisément.
- Réponse.** a) 95 % et $\approx 70,1\%$ · b) à la 11^e semaine · c) non : $E(26) \approx 43\%$ · d) une décroissance d'environ 1,17 % par semaine.