

Plaquette 1 - Propriétés de $\ln$, dérivées et résolution de seuils

Fonction logarithme népérien — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$, et c'est la **réci-proque** de l'exponentielle :

$$\ln(e^x) = x \quad \text{pour tout réel } x \quad e^{\ln x} = x \quad \text{pour } x > 0$$

- Valeurs de référence : $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln e^n = n$.

- Propriétés algébriques (pour $a > 0$, $b > 0$) :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \ln a \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

- **Dérivées** : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

- $\ln$ est strictement **croissante** : $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ (pour a, b strictement positifs).
De plus $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$ et $\ln x > 0$ pour $x > 1$.

- **Résolution** : $e^x = k$ (avec $k > 0$) donne $x = \ln k$; et

$$a^x = k \Leftrightarrow x \ln a = \ln k \Leftrightarrow x = \frac{\ln k}{\ln a}$$

- Une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est $\ln x$.

Correction de l'exercice 1 - Valeurs de référence

Par définition, $\ln b$ est le nombre a tel que $e^a = b$. On écrit donc chaque nombre comme une puissance de e , puis on lit l'exposant :

$$\ln(e^n) = n$$

- $\ln 1 = 0$, car $1 = e^0$.

- $\ln e = 1$, car $e = e^1$.

- $\ln e^5 = 5$.

- $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$.

- $\ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = 0,5$.

Contrôle du signe : $\frac{1}{e}$ est inférieur à 1, son logarithme est bien négatif.

Réponse. 0 ; 1 ; 5 ; -1 ; 0,5.

Correction de l'exercice 2 - Propriétés algébriques

On décompose avant d'appliquer les propriétés.

a) $10 = 2 \times 5$, donc $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5 \approx 0,693 + 1,609 = 2,302$.

b) $2,5 = \frac{5}{2}$, donc $\ln 2,5 = \ln 5 - \ln 2 \approx 0,916$.

c) $8 = 2^3$, donc $\ln 8 = 3 \ln 2 \approx 2,079$.

d) $0,2 = \frac{1}{5}$, donc $\ln 0,2 = -\ln 5 \approx -1,609$ (négatif, car $0,2 < 1$).

Réponse. a) $\approx 2,302$ · b) $\approx 0,916$ · c) $\approx 2,079$ · d) $\approx -1,609$.

Correction de l'exercice 3 - Équations avec $\ln$

On applique l'exponentielle aux deux membres, sans oublier la **condition d'existence**.

- a) $x = e^3 \approx 20,086$ (et $e^3 > 0$: la condition est respectée).
 b) Condition : $2x - 1 > 0$, soit $x > 0,5$. L'équation donne $2x - 1 = e^0 = 1$, donc $x = 1$, qui vérifie bien la condition.
 c) $x = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

Réponse. a) $x = e^3$ · b) $x = 1$ · c) $x = e^{-1} \approx 0,368$.

Correction de l'exercice 4 - Équations exponentielles

- a) $x = \ln 7 \approx 1,946$.
 b) $-2x = \ln 0,1$, donc $x = -\frac{\ln 0,1}{2} = \frac{\ln 10}{2} \approx 1,151$.
 c) $x \ln 1,04 = \ln 3$, donc

$$x = \frac{\ln 3}{\ln 1,04} \approx \frac{1,0986}{0,03922} \approx 28,011$$

— Interprétation de c) : un capital placé à 4 % triple en environ 28 ans.

Réponse. a) $\ln 7 \approx 1,946$ · b) $\frac{\ln 10}{2} \approx 1,151$ · c) $\approx 28,011$.

Correction de l'exercice 5 - Inéquation avec $\ln$

On applique $\ln$ (croissante, l'inégalité est conservée) :

$$x \ln 0,9 < \ln 0,25$$

— **Attention** : $\ln 0,9 \approx -0,1054$ est **négatif**. En divisant par un nombre négatif, l'inégalité **change de sens** :

$$x > \frac{\ln 0,25}{\ln 0,9} \approx \frac{-1,3863}{-0,1054} \approx 13,16$$

— Ensemble des solutions : $]13,16; +\infty[$, soit $x \geq 14$ pour un nombre entier de périodes.

— Contrôle : $0,9^{13} \approx 0,254$ (encore trop grand) et $0,9^{14} \approx 0,229 < 0,25$. Cohérent.

Réponse. $x > \frac{\ln 0,25}{\ln 0,9} \approx 13,16$ (soit $x \geq 14$ en entiers).

Correction de l'exercice 6 - Dérivées avec $\ln$

- a) $f'(x) = \frac{1}{x}$.
 b) $g'(x) = \frac{3}{x} - 2$.
 c) Formule $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec $u = 2x + 5$: $h'(x) = \frac{2}{2x + 5}$.
 d) Produit avec $u = x$ et $v = \ln x$:

$$k'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Réponse. a) $\frac{1}{x}$ · b) $\frac{3}{x} - 2$ · c) $\frac{2}{2x + 5}$ · d) $\ln x + 1$.

Correction de l'exercice 7 - Variations d'une fonction avec $\ln$

— Dérivée (exercice précédent) : $f'(x) = \ln x + 1$.

— $f'(x) = 0$ donne $\ln x = -1$, soit $x = e^{-1} \approx 0,368$.

— Signe : $\ln x + 1 < 0$ pour $x < e^{-1}$ et > 0 au-delà (car $\ln$ est croissante).

Intervalle	$]0; e^{-1}]$	$[e^{-1}; +\infty[$
Signe de $f'(x)$	–	+
Variations de f	décroissante	croissante

— Minimum : $f(e^{-1}) = e^{-1} \times (-1) = -e^{-1} \approx -0,368$.

Réponse. Décroissante puis croissante ; minimum $-e^{-1} \approx -0,368$ en $x = e^{-1}$.

Correction de l'exercice 8 - Signe d'une fonction avec $\ln$

— $f(x) = 0$ donne $\ln x = 2$, soit $x = e^2 \approx 7,389$.

— $\ln$ étant croissante : $\ln x < 2$ pour $x < e^2$ et $\ln x > 2$ au-delà.

— Donc f est **négative** sur $]0; e^2[$, nulle en e^2 , **positive** sur $]e^2; +\infty[$.

— Contrôle : $f(1) = 0 - 2 = -2 < 0$ et $f(10) = \ln 10 - 2 \approx 0,303 > 0$. Cohérent.

Réponse. $f < 0$ sur $]0; e^2[$ et $f > 0$ sur $]e^2; +\infty[$.

Correction de l'exercice 9 - Temps de charge d'un condensateur

On isole l'exponentielle avant d'appliquer $\ln$.

— $12(1 - e^{-50t}) = 10$ donne $1 - e^{-50t} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

— Donc $e^{-50t} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

— On applique $\ln$: $-50t = \ln \frac{1}{6} = -\ln 6$, donc

$$t = \frac{\ln 6}{50} \approx \frac{1,7918}{50} \approx 0,036 \text{ s}$$

— Contrôle : $12(1 - e^{-50 \times 0,036}) \approx 12 \times 0,835 \approx 10,02 \text{ V}$. Cohérent.

— Repère utile : $t \approx 1,8 \tau$, ce qui est plausible pour atteindre 83 % de la tension finale.

Réponse. $t = \frac{\ln 6}{50} \approx 0,036 \text{ s}$.

Correction de l'exercice 10 - Demi-vie

a) On résout $A_0 e^{-0,046t} = \frac{A_0}{2}$.

— On divise par A_0 (non nul) : $e^{-0,046t} = 0,5$.

— On applique $\ln$: $-0,046t = \ln 0,5 = -\ln 2$, donc

$$t = \frac{\ln 2}{0,046} \approx \frac{0,6931}{0,046} \approx 15,1 \text{ jours}$$

b) Non : A_0 s'est simplifié dès la première étape.

— La demi-vie ne dépend que du coefficient 0,046, pas de la quantité initiale. C'est la propriété fondamentale de la décroissance exponentielle.

Réponse. a) $t = \frac{\ln 2}{0,046} \approx 15,1 \text{ jours}$ · b) non.

Correction de l'exercice 11 - Problème : niveau de bruit et $\ln$

a) $\frac{I(5)}{I_0} = e^{-0,12 \times 5} = e^{-0,6} \approx 0,5488$.

— Il reste donc environ 54,9 % de l'intensité initiale.

b) On résout $e^{-0,12x} = 0,1$.

— On applique $\ln$: $-0,12x = \ln 0,1 = -\ln 10$, donc

$$x = \frac{\ln 10}{0,12} \approx \frac{2,3026}{0,12} \approx 19,2 \text{ m}$$

— Contrôle : $e^{-0,12 \times 19,2} \approx e^{-2,304} \approx 0,0999$. Cohérent.

Réponse. a) $\approx 54,9\%$ · b) $\approx 19,2 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 12 - Simplifier avec les propriétés de $\ln$

On utilise les propriétés algébriques du logarithme :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \ln a$$

a) $\ln 4 + \ln 25 = \ln 100$ et $2 \ln 10 = \ln(10^2) = \ln 100$, donc $A = \ln 100 - \ln 100 = 0$.

b) $e^3 \times e^{-1} = e^2$, donc $B = \ln e^2 = 2$.

c) Pour $x > 0$, $\frac{x^2}{x} = x$, donc $C = \ln x$. On peut aussi écrire $C = 2 \ln x - \ln x = \ln x$.

Réponse. a) $A = 0$ · b) $B = 2$ · c) $C = \ln x$.

Correction de l'exercice 13 - Tangentes à la courbe de $\ln$

La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, avec ici $f(x) = \ln x$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$.

— En $a = 1$: $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$, donc $y = x - 1$.

— En $a = e$: $f(e) = 1$ et $f'(e) = \frac{1}{e}$, donc

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{x}{e} - 1 + 1 = \frac{x}{e}$$

La seconde tangente passe par l'origine, comme celle de l'exponentielle au point d'abscisse 1 : les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Réponse. $y = x - 1$, puis $y = \frac{x}{e}$.

Correction de l'exercice 14 - Un seuil avec le logarithme

Au bout de n années, le capital a été multiplié par $1,08^n$. On cherche le plus petit entier n tel que $1,08^n \geq 3$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante : on l'applique aux deux membres sans changer le sens, puis on fait descendre l'exposant. Comme $\ln 1,08 > 0$, la division conserve le sens :

$$n \ln 1,08 \geq \ln 3 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3}{\ln 1,08} \approx 14,27$$

Le capital a au moins triplé à partir de 15 ans. **Contrôle** : $1,08^{14} \approx 2,94$, encore insuffisant, et $1,08^{15} \approx 3,17$.

Réponse. À partir de 15 ans ($n \geq 14,27$).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : temps de doublement

a) On résout $1,06^x = 2$:

$$x = \frac{\ln 2}{\ln 1,06} \approx \frac{0,6931}{0,05827} \approx 11,90 \text{ ans}$$

b) Règle des 70 : $\frac{70}{6} \approx 11,67$ ans. L'écart est faible (environ 0,23 an) : l'approximation est bonne pour un petit taux.

c) Pour 18 % : $x = \frac{\ln 2}{\ln 1,18} \approx \frac{0,6931}{0,1655} \approx 4,19$ ans.

— Règle des 70 : $\frac{70}{18} \approx 3,89$ ans, soit un écart de 0,3 an — l'approximation se dégrade quand le taux augmente.

— Conclusion : la règle des 70 est un outil de calcul mental ; le logarithme donne la valeur exacte.

Réponse. a) $\approx 11,90$ ans · b) règle des 70 : 11,67 ans · c) $\approx 4,19$ ans (contre 3,89).