

Plaquette 2 – Calcul avec $\ln$: propriétés et simplifications

Fonction logarithme népérien — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Le logarithme fait exactement l'inverse de l'exponentielle : il **transforme les produits en sommes** et fait **descendre les exposants**. Toute simplification se ramène à ces trois règles, et à deux conditions à ne jamais oublier : $\ln$ n'existe que pour des nombres **strictement positifs**, et $\ln 1 = 0$.

Exercice 1 – Valeurs exactes

Donner la valeur exacte de chaque expression.

- a) $\ln 1$ et $\ln e$
- b) $\ln(e^5)$ et $\ln(e^{-3})$
- c) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ et $\ln(\sqrt{e})$

Exercice 2 – Regrouper en un seul logarithme

Écrire chaque expression sous la forme $\ln k$ avec k entier.

- a) $\ln 12 - \ln 3$
- b) $\ln 2 + \ln 50$
- c) $2 \ln 3 + \ln 2$

Exercice 3 – Exprimer avec $\ln 2$ et $\ln 3$

Exprimer chaque logarithme en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$, puis donner une valeur approchée au millièm, avec $\ln 2 \approx 0,693$ et $\ln 3 \approx 1,099$.

- a) $\ln 6$
- b) $\ln 12$
- c) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Exercice 4 – Simplifier des compositions

Simplifier, en précisant les conditions d'existence.

- a) $\ln(e^{2x})$
- b) $e^{\ln(3x)}$
- c) $\ln(e^x \times e^3)$

Exercice 5 - Développer un logarithme

Développer $\ln\left(\frac{x^2\sqrt{x}}{3}\right)$ pour $x > 0$.

Exercice 6 - Le piège de la somme

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour $x > 1$? Justifier.

a) $\ln(x + 1) = \ln x + \ln 1$

b) $\ln(x^2) = 2 \ln x$

c) $\frac{\ln x}{\ln 2} = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 7 - Une somme télescopique

Calculer $\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right)$.

Exercice 8 - Conditions d'existence

Déterminer l'ensemble de définition de chaque expression.

a) $\ln(2x - 6)$

b) $\ln(x^2 + 1)$

c) $\ln(3 - x) + \ln(x)$

Exercice 9 - Deux expressions à ne pas confondre

Comparer les ensembles de définition et les expressions de $f(x) = \ln(x^2)$ et $g(x) = 2 \ln x$.

Exercice 10 - Comparer des logarithmes

Ranger dans l'ordre croissant : $\ln 0,5$; $\ln 1$; $\ln 7$; $\ln e$; $\ln 2$.

Exercice 11 - Une expression avec exponentielle et logarithme

Simplifier, pour $x > 0$: $A = \ln(x e^x) - \ln x$.

Exercice 12 - Retrouver un nombre

Déterminer le réel x dans chaque cas.

a) $\ln x = 2$

b) $\ln x = -1$

c) $\ln x = \ln 3 + \ln 5$

Exercice 13 - Le signe d'une expression

Déterminer le signe de $f(x) = \ln x - 1$ sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 14 - Logarithme et échelle de puissance

Un gain est exprimé par $G = 10 \times \frac{\ln\left(\frac{P_s}{P_e}\right)}{\ln 10}$, où P_s et P_e sont les puissances de sortie et d'entrée.

- a) Calculer G lorsque la puissance est multipliée par 10, puis par 100.
- b) Que devient G si la puissance est divisée par 10 ?

Exercice 15 - Une identité à démontrer

Montrer que pour tout $x > 0$: $\ln(x^3) - 3 \ln(\sqrt{x}) = \frac{3}{2} \ln x$.

Exercice 16 - Synthèse : une chaîne de transformations

On pose $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}}{x}\right)$ pour $x > 0$.

- a) Montrer que $f(x) = 2x - \ln x$.
- b) Calculer $f(1)$ et $f(e)$ (valeur exacte puis arrondie au millième).
- c) Résoudre $f(x) = 2x$.
- d) Montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \geq 1$.