

Plaquette 4 - Dérivées, variations et tangentes avec $\ln$

Fonction logarithme népérien — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

La dérivée de $\ln$ est $\frac{1}{x}$: c'est une **fraction**, et c'est ce qui donne leur allure à toutes les études du chapitre. Deux réflexes : on travaille **toujours** sur $]0 ; +\infty[$, où $x > 0$ simplifie tous les signes ; et on met $f'(x)$ **sur un dénominateur commun** pour que le signe se lise sur le numérateur.

Exercice 1 - Dérivées immédiates

Calculer la dérivée de chaque fonction sur $]0 ; +\infty[$.

a) $f(x) = 3 \ln x$

b) $g(x) = 3 \ln x - 2x$

c) $h(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

Exercice 2 - Un logarithme composé

Calculer la dérivée de chaque fonction, en précisant l'intervalle.

a) $f(x) = \ln(2x + 1)$

b) $g(x) = \ln(x^2 + 1)$

Exercice 3 - Un produit à connaître

Calculer la dérivée de $f(x) = x \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$, puis étudier ses variations.

Exercice 4 - Un quotient à connaître

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$, puis déterminer son maximum.

Exercice 5 - Une tangente simple

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \ln x$ au point d'abscisse 1.

Exercice 6 - Une tangente passant par l'origine

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \ln x$ au point d'abscisse e , et montrer qu'elle passe par l'origine.

Exercice 7 - Un minimum classique

Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

a) Calculer $f'(x)$ et le réduire au même dénominateur.

b) Dresser le tableau de variations et donner le minimum.

Exercice 8 - Un maximum avec un logarithme

Soit $f(x) = 2 \ln x - x + 3$ sur $]0; +\infty[$.

- Calculer $f'(x)$ et le réduire.
- Déterminer le maximum de f (valeur exacte puis arrondie au millièmè).

Exercice 9 - Un produit avec un carré

Calculer et factoriser la dérivée de $f(x) = x^2 \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 10 - Les limites aux bornes

Donner, en justifiant brièvement, les limites suivantes.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

Exercice 11 - Signe et variations d'un quotient

Soit $f(x) = \frac{\ln x - 2}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- Déterminer le signe de f .
- Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 12 - Une intégrale avec ln

Calculer les deux intégrales.

- $\int_1^e \frac{1}{x} dx$
- $\int_1^4 \frac{3}{x} dx$ (valeur exacte puis arrondie au millièmè)

Exercice 13 - Comparer deux croissances

On compare $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$.

x	1	10	100	10 000
$\ln x$	0	2,30	4,61	9,21
$\sqrt{x}$	1	3,16	10	100

Que peut-on dire de la croissance du logarithme ?

Exercice 14 - Une fonction à deux logarithmes

Soit $f(x) = \ln x - \ln(x + 1)$ sur $]0; +\infty[$.

- Montrer que $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ et en déduire le signe de f .
- Calculer $f'(x)$ sous forme réduite.

Exercice 15 - Retrouver un coefficient

Soit $f(x) = a \ln x + x$, avec a un réel. Déterminer a pour que la courbe de f admette une tangente horizontale au point d'abscisse 3.

Exercice 16 - Synthèse : étude complète

Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.

- Calculer $f'(x)$ et le factoriser.
- Dresser le tableau de variations et donner le maximum (valeur exacte puis arrondie au millième).
- Déterminer le signe de f et l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses.
- Sachant que $f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ et vers $-\infty$ en 0^+ , décrire l'allure de la courbe.