

Plaquette 3 – Équations et inéquations avec $\ln$

Fonction logarithme népérien – Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Le logarithme est l'outil qui **fait descendre l'inconnue de l'exposant**. Toute équation $e^x = k$, $a^x = k$ ou $q^n < s$ se résout en appliquant $\ln$ aux deux membres. Deux vigilances constantes : vérifier les **conditions d'existence** avant de résoudre, et se rappeler que diviser par un $\ln$ **négatif** inverse le sens d'une inégalité.

Exercice 1 – Deux équations immédiates

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

a) $\ln x = 3$

b) $e^x = 7$

Exercice 2 – Une équation avec une condition

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(2x - 1) = 0$.

Exercice 3 – Une somme de logarithmes

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln x + \ln(x - 3) = \ln 4$.

Exercice 4 – Une exponentielle composée

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x-1} = 5$.

Exercice 5 – Une culture qui triple chaque heure

Une culture de bactéries est multipliée par 3 chaque heure : au bout de x heures, elle a été multipliée par 3^x .

Au bout de combien de temps a-t-elle été multipliée par 20 ? Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millièmètre d'heure.

Exercice 6 – Un changement de variable

Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$.

Exercice 7 – Une inéquation simple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln x < 2$.

Exercice 8 – Une inéquation avec condition

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln(x - 1) \geq 1$.

Exercice 9 - Le piège du logarithme négatif

Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $0,85^n < 0,1$.

Exercice 10 - Un seuil de décroissance exponentielle

Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'inéquation $e^{-0,3t} \leq 0,05$.

Exercice 11 - Un capital à faire croître

Un capital de 5 000 € placé à 3,5 % par an vaut $5\,000 \times 1,035^n$ au bout de n années. Déterminer par le calcul le nombre d'années nécessaires pour dépasser 8 000 €.

Exercice 12 - Un temps de doublement

Une population croît de 2 % par an. Au bout de combien d'années aura-t-elle doublé ?

Exercice 13 - Une équation à vérifier

Un élève résout $\ln(x) + \ln(x - 2) = \ln 3$ et trouve $x = 3$ et $x = -1$.
Sa réponse est-elle correcte ?

Exercice 14 - L'intersection de deux courbes exponentielles

On considère les fonctions $f(x) = e^{3x}$ et $g(x) = 2^{x+1}$.
Déterminer l'abscisse exacte du point où leurs courbes se coupent, puis une valeur approchée au millième.

Exercice 15 - Un seuil entier avec deux suites

Une machine A produit $200 \times 1,04^n$ pièces le mois n , une machine B en produit $350 \times 1,01^n$.
Déterminer par le calcul le premier mois où A dépasse B.

Exercice 16 - Synthèse : durée de vie d'un filtre

L'efficacité d'un filtre décroît selon $E(t) = 95 \times 0,97^t$ (en %, t en semaines).

- Calculer $E(0)$ et $E(10)$, arrondis au dixième.
- Le filtre doit être remplacé lorsque son efficacité passe sous 70 %. Déterminer par le calcul la semaine du remplacement.
- Le fabricant annonce « une durée de vie de 6 mois ». Cette annonce est-elle compatible avec le modèle ?
- Quel taux de décroissance hebdomadaire permettrait d'atteindre les 6 mois annoncés ?