

Plaquette 1 – Propriétés de $\ln$, dérivées et résolution de seuils

Fonction logarithme népérien — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

$\ln$ est la fonction réciproque de l'exponentielle : elle « descend » les exposants et permet de résoudre exactement les équations $e^x = k$ ou $a^x = k$. On travaille ses propriétés, sa dérivée, ses variations, puis les temps de charge et de demi-vie.

Exercice 1 – Valeurs de référence

Calculer sans calculatrice : $\ln 1$, $\ln e$, $\ln e^5$, $\ln \frac{1}{e}$, $\ln \sqrt{e}$.

Exercice 2 – Propriétés algébriques

Sachant que $\ln 2 \approx 0,693$ et $\ln 5 \approx 1,609$, calculer une valeur approchée de :

- a) $\ln 10$
- b) $\ln 2,5$
- c) $\ln 8$
- d) $\ln 0,2$

Exercice 3 – Équations avec $\ln$

Résoudre : a) $\ln x = 3$ · b) $\ln(2x - 1) = 0$ · c) $\ln x = -1$.

Exercice 4 – Équations exponentielles

Résoudre (valeur exacte puis arrondie au millième) : a) $e^x = 7$ · b) $e^{-2x} = 0,1$ · c) $1,04^x = 3$.

Exercice 5 – Inéquation avec $\ln$

Résoudre $0,9^x < 0,25$.

Exercice 6 – Dérivées avec $\ln$

Calculer la dérivée de :

- a) $f(x) = \ln x$
- b) $g(x) = 3 \ln x - 2x$
- c) $h(x) = \ln(2x + 5)$ sur $] -2,5 ; +\infty[$
- d) $k(x) = x \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$

Exercice 7 – Variations d'une fonction avec $\ln$

Soit $f(x) = x \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$. Étudier ses variations et donner son minimum.

Exercice 8 – Signe d’une fonction avec $\ln$

Déterminer le signe de $f(x) = \ln x - 2$ sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 9 – Temps de charge d’un condensateur

La tension de charge est $u(t) = 12 \left(1 - e^{-\frac{t}{0,02}} \right)$ (volts, secondes).

Au bout de combien de temps atteint-elle 10 V (arrondi au millième de seconde) ?

Exercice 10 – Demi-vie

Une activité radioactive suit $A(t) = A_0 e^{-0,046t}$ (t en jours).

- Calculer la demi-vie, c’est-à-dire le temps au bout duquel A est divisée par 2 (arrondi au dixième).
- Ce résultat dépend-il de A_0 ?

Exercice 11 – Problème : niveau de bruit et $\ln$

L’intensité d’un signal décroît selon $I(x) = I_0 e^{-0,12x}$, où x est la distance en mètres.

- Quel pourcentage de l’intensité reste-t-il après 5 m (arrondi au dixième) ?
- À quelle distance l’intensité est-elle réduite à 10 % (arrondie au dixième) ?

Exercice 12 – Simplifier avec les propriétés de $\ln$

Écrire le plus simplement possible :

- $A = \ln 4 + \ln 25 - 2 \ln 10$
- $B = \ln(e^3 \times e^{-1})$
- $C = \ln\left(\frac{x^2}{x}\right)$, pour $x > 0$

Exercice 13 – Tangentes à la courbe de $\ln$

Déterminer l’équation de la tangente à la courbe de la fonction $\ln$ au point d’abscisse 1, puis au point d’abscisse e .

Exercice 14 – Un seuil avec le logarithme

Un capital est multiplié par 1,08 chaque année. Déterminer par le calcul à partir de combien d’années entières il aura au moins triplé.

Exercice 15 – Synthèse : temps de doublement

Une grandeur croît de 6 % par an.

- Calculer le temps de doublement exact avec $\ln$, puis l’arrondir au centième.
- Comparer avec la « règle des 70 » ($x \approx \frac{70}{t}$).
- Même question pour un taux de 18 %.