

MATHÉMATIQUES

Fonction logarithme népérien

Terminale STI2D

Logarithme népérien • $e^x = a$ • $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ • $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
Limites • Équations exponentielles • Demi-vie • $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe terminale STI2D** (programme de 2019), partie mathématiques, « Fonction logarithme népérien ». Il couvre :

- définition de $\ln a$ ($a > 0$) comme solution de $e^x = a$; sens de variation ;
- propriétés algébriques ; lien avec le logarithme décimal de l'enseignement commun ;
- limites en 0 et en $+\infty$, courbe ; dérivée $\frac{1}{x}$;
- résolution de $e^{ax} = b$, $e^{ax} > b$, $\ln x = b$, $\ln x > b$; études de fonctions.

Objectif : définir le logarithme népérien, utiliser ses propriétés, sa dérivée et ses limites, et résoudre des équations et inéquations où l'inconnue est en exposant.

Table des matières

1	Définition	3
2	Propriétés algébriques	3
3	Limites, dérivée, courbe	4
4	Équations et inéquations	4
5	Erreurs classiques	5
6	Fiche de synthèse	5
7	Exercices d'application	5
8	Corrigés des exercices	5

1. Définition

Logarithme népérien

Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ a une unique solution, notée $\ln a$:

$$\boxed{e^x = a \iff x = \ln a} \quad (a > 0).$$

Conséquences

$\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $e^{\ln a} = a$ pour $a > 0$; $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x .

Sens de variation et signe

$\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: $\ln a < \ln b \iff a < b$. Donc $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$ et $\ln x > 0$ si $x > 1$.

2. Propriétés algébriques

Règles de calcul

Pour $a > 0$, $b > 0$ et n entier :

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b} \quad \ln \frac{1}{b} = -\ln b \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \ln(a^n) = n \ln a \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Démonstration. $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$, donc $\ln a + \ln b$ est la solution de $e^x = ab$: c'est $\ln(ab)$. Les autres règles s'en déduisent.

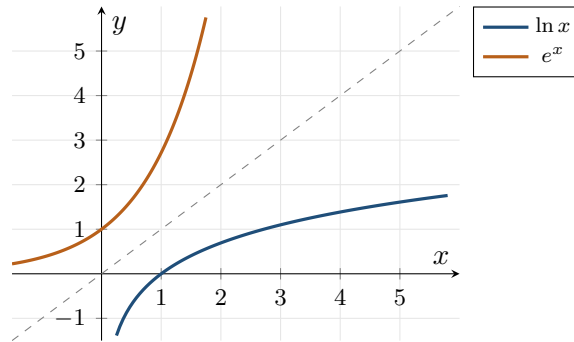
Lien avec le logarithme décimal

$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$: les deux logarithmes sont proportionnels et ont les mêmes propriétés.

3. Limites, dérivée, courbe

Limites et dérivée

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.



Les courbes de $\ln$ et de $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

4. Équations et inéquations

Résoudre

- $e^{ax} = b$ ($b > 0$, $a \neq 0$) $\iff ax = \ln b \iff x = \frac{\ln b}{a}$.
- $\ln x = b \iff x = e^b$; $\ln x > b \iff x > e^b$.
- Pour une inéquation, on applique $\ln$ ou $\exp$ (croissantes) et l'on change le sens seulement en divisant par un nombre négatif.

Demi-vie

Le nombre de noyaux radioactifs est $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. La demi-vie T vérifie $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, soit $-\lambda T = -\ln 2$, d'où $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Pour le carbone 14, $\lambda \approx 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$: $T \approx 5\,730$ ans.

Étude d'une fonction

$f(x) = x - \ln x$ sur $]0; +\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, du signe de $x-1$. f décroît sur $]0; 1]$, croît sur $[1; +\infty[$; minimum $f(1) = 1$. Ainsi $\ln x \leq x - 1 < x$ pour tout $x > 0$.

5. Erreurs classiques

À éviter

- Écrire $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$: la règle porte sur le produit.
- Prendre le logarithme d'un nombre négatif ou nul.
- Oublier de changer le sens d'une inégalité en divisant par un nombre négatif (par exemple $-\lambda$).
- Confondre $\ln(x^2) = 2 \ln x$ (vrai pour $x > 0$) et $(\ln x)^2$.

6. Fiche de synthèse

Définition	$e^x = a \iff x = \ln a ; \ln 1 = 0 ; \ln e = 1$
Règles	$\ln(ab) = \ln a + \ln b ; \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b ; \ln(a^n) = n \ln a$
Dérivée, limites	$(\ln x)' = \frac{1}{x} ; -\infty \text{ en } 0^+ ; +\infty \text{ en } +\infty$
Équations	$e^{ax} = b \iff x = \frac{\ln b}{a} ; \ln x = b \iff x = e^b$
Demi-vie	$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Simplifier

Écrire $\ln 8 - \ln 2$ et $\ln(e^3) + \ln \frac{1}{e}$ le plus simplement possible.

Exercice 2 – Équations

Résoudre $e^{2x} = 5$ et $\ln x = 3$.

Exercice 3 – Inéquation

Résoudre $e^{-0,1t} < 0,2$ pour $t \geq 0$.

Exercice 4 – Étude

Étudier les variations de $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $\ln 8 - \ln 2 = \ln 4 = 2 \ln 2 ; \ln(e^3) + \ln \frac{1}{e} = 3 - 1 = 2$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $2x = \ln 5$, soit $x = \frac{\ln 5}{2} \approx 0,805 ; x = e^3 \approx 20,09$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $-0,1t < \ln 0,2$, d'où (division par $-0,1 < 0$) $t > -10 \ln 0,2 \approx 16,1$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$, du signe de $x-1$: f décroît sur $]0; 1]$, croît ensuite ; minimum $f(1) = 1$.