

Plaquette 2 - Calculer avec les puissances réelles

Fonctions exponentielles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les cinq règles, pour $a > 0$ et x, y réels quelconques :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^0 = 1 \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Exposants fractionnaires.

Écriture	Signification
$a^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{a}$
$a^{\frac{1}{3}}$	racine cubique de a
$a^{\frac{1}{n}}$	racine n -ième de a
$a^{\frac{p}{q}}$	racine q -ième de a^p

Produits de bases différentes : $a^x \times b^x = (ab)^x$ et $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.

Signe. Pour $a > 0$, on a toujours $a^x > 0$: **une exponentielle ne s'annule jamais** et ne change jamais de signe.

Valeurs repères.

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
2^x	0,5	1	$\approx 1,414$	2	4

⚠ Deux pièges constants : $a^x + a^y$ ne se simplifie **pas** (seuls les produits le permettent), et $(a^x)^y$ vaut a^{xy} , pas a^{x+y} .

Correction de l'exercice 1 - Produits et quotients

— Pour un **produit** de puissances de même base, on additionne les exposants :
 $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$.

— Pour un **quotient**, on soustrait l'exposant du dénominateur : $\frac{3^7}{3^4} = 3^{7-4} = 3^3 = 27$.

— Pour une **puissance de puissance**, on multiplie les exposants :

$$(5^2)^3 = 5^{2 \times 3} = 5^6 = 15\,625$$

Additionner les exposants dans le dernier cas donnerait $5^5 = 3\,125$, à tort :

$$(5^2)^3 = 25 \times 25 \times 25. \text{ Réponses : } 256 ; 27 ; 15\,625.$$

Réponse. $2^8 = 256$; $3^3 = 27$; $5^6 = 15\,625$.

Correction de l'exercice 2 - Exposants négatifs

On utilise la règle $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$: un exposant négatif donne l'inverse de la puissance positive.

$$- 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125.$$

$$- 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

— $\frac{1}{4^{-2}}$ est l'inverse de $\frac{1}{4^2}$: prendre deux fois l'inverse ramène au nombre de départ, donc

$$\frac{1}{4^{-2}} = 4^2 = 16$$

Contrôle : avec une base supérieure à 1, un exposant négatif donne bien un nombre plus petit que 1 (0,125 et 0,01). Réponses : 0,125 ; 0,01 ; 16.

Réponse. 0,125 ; 0,01 ; 16.

Correction de l'exercice 3 - Exposants fractionnaires

L'exposant $\frac{1}{n}$ désigne la racine n -ième, c'est-à-dire le nombre positif dont la puissance n -ième redonne le nombre de départ.

$$- 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3.$$

— $27^{\frac{1}{3}}$ est le nombre dont le cube vaut 27 : comme $3^3 = 27$, il vaut 3.

— Pour $16^{\frac{3}{4}}$, on écrit $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 3$ et on utilise la règle des puissances de puissances :

$$16^{\frac{3}{4}} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

car $2^4 = 16$. **Contrôle** dans l'autre ordre : $16^3 = 4\,096$ et $8^4 = 4\,096$. Réponses : 3 ; 3 ; 8.

Réponse. 3 ; 3 ; 8.

Correction de l'exercice 4 - Simplifier une expression

Au numérateur, on additionne les exposants : $2^x \times 2^3 = 2^{x+3}$. Pour le quotient, on soustrait l'exposant du dénominateur, en mettant des parenthèses car il s'agit de retirer **tout** $x - 1$:

$$\frac{2^{x+3}}{2^{x-1}} = 2^{(x+3)-(x-1)} = 2^{x+3-x+1} = 2^4 = 16$$

Le résultat ne dépend pas de x . **Contrôle** pour $x = 5$: $\frac{32 \times 8}{16} = 16$; pour $x = 0$:

$$\frac{1 \times 8}{0,5} = 16. \text{ Réponse : } 16.$$

Réponse. 16, quelle que soit la valeur de x .

Correction de l'exercice 5 - Deux bases différentes

Quand les **exposants** sont égaux, on peut regrouper les bases.

$$- 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5 = 100\,000. \text{ Contrôle : } 32 \times 3\,125 = 100\,000.$$

$$- \frac{6^4}{2^4} = \left(\frac{6}{2}\right)^4 = 3^4 = 81. \text{ Contrôle : } \frac{1\,296}{16} = 81.$$

$$a^x \times b^x = (ab)^x \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Réponses : $10^5 = 100\,000$ et $3^4 = 81$.

Réponse. $10^5 = 100\,000$ et $3^4 = 81$.

Correction de l'exercice 6 - Un piège classique

On calcule chaque membre séparément. À gauche, $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$; à droite, $2^7 = 128$. Comme $24 \neq 128$, l'égalité est **fausse**.

L'élève a additionné les exposants, ce qui n'est permis que pour un **produit** :

$2^3 \times 2^4 = 2^7$. Une somme de puissances ne se simplifie pas en une seule puissance ; on peut seulement la factoriser :

$$2^3 + 2^4 = 2^3(1 + 2) = 8 \times 3 = 24$$

Réponse : la bonne valeur est 24.

Réponse. Faux : $8 + 16 = 24$, alors que $2^7 = 128$. On n'additionne les exposants que pour un produit.

Correction de l'exercice 7 - Factoriser

On fait apparaître 3^x dans le premier terme : $3^{x+2} = 3^x \times 3^2 = 9 \times 3^x$. L'expression devient $9 \times 3^x - 3^x$, où 3^x est un facteur commun :

$$3^{x+2} - 3^x = 3^x(9 - 1) = 8 \times 3^x$$

Contrôle pour $x = 1$: $3^3 - 3^1 = 27 - 3 = 24$ et $8 \times 3 = 24$. Comme $3^x > 0$, l'expression est toujours positive. Réponse : 8×3^x .

Réponse. 8×3^x .

Correction de l'exercice 8 - Sens de variation

Le sens de variation de $x \mapsto a^x$ se lit sur la base : croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$.

- $f(x) = 1,25^x$: la base 1,25 est supérieure à 1, donc f est **croissante**. Par exemple $f(0) = 1$ et $f(2) = 1,5625$.
- $g(x) = 0,7^x$: la base est comprise entre 0 et 1, donc g est **décroissante** ; $g(0) = 1$ et $g(2) = 0,49$.
- $h(x) = 1^x$ vaut 1 pour tout x : h est **constante**.

Les trois courbes passent par le point $(0 ; 1)$, puisque $a^0 = 1$ pour toute base.

Réponse. f croissante, g décroissante, h constante.

Correction de l'exercice 9 - Images non entières

Pour un exposant non entier, on le décompose en une partie entière et une partie connue.

Pour $1,08^{2,5}$. On écrit $1,08^{2,5} = 1,08^2 \times 1,08^{0,5} = 1,1664 \times \sqrt{1,08}$. Avec $\sqrt{1,08} \approx 1,03923$, on obtient environ 1,21216, soit 1,212 au millièm.

Pour $0,9^{1,5}$. De même, $0,9^{1,5} = 0,9 \times \sqrt{0,9} \approx 0,9 \times 0,94868 \approx 0,854$.

Contrôle : la fonction $x \mapsto 0,9^x$ est décroissante, donc $0,9^{1,5}$ doit être compris entre $0,9^2 = 0,81$ et $0,9^1 = 0,9$; c'est bien le cas. Réponses : 1,212 et 0,854.

Réponse. $1,08^{2,5} \approx 1,212$ et $0,9^{1,5} \approx 0,854$.

Correction de l'exercice 10 - Un demi-exposant en contexte

On remplace x par 0,5 : $V(0,5) = 200 \times 1,06^{0,5}$. L'exposant 0,5 désigne la racine carrée :

$$V(0,5) = 200 \times \sqrt{1,06} \approx 200 \times 1,029563 \approx 205,9$$

Comme x est en années, c'est la valeur au bout de **six mois** : la hausse sur un semestre vaut environ 2,96 %.

Contrôle : deux semestres à 2,96 % donnent $1,0296^2 \approx 1,06$, soit bien 6 % sur l'année. Le semestre ne correspond pas à 3 % : deux hausses de 3 % feraient 6,09 %, car la seconde porte sur une valeur déjà augmentée.

Réponse. $V(0,5) \approx 205,9$: c'est la valeur à six mois, soit une hausse semestrielle de 2,96 %.

Correction de l'exercice 11 - Une équation simple

La méthode consiste à écrire les deux membres comme des puissances de la **même base**.

- $32 = 2^5$, donc l'équation s'écrit $2^x = 2^5$. La fonction $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante : deux exposants différents donnent deux valeurs différentes. Donc $x = 5$.
- $\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$, donc l'équation s'écrit $3^x = 3^{-3}$, d'où $x = -3$.

Contrôle : $3^{-3} = \frac{1}{27}$. Quand le second membre n'est pas une puissance connue, comme pour $2^x = 30$, on résout par balayage. Réponses : $x = 5$ et $x = -3$.

Réponse. $x = 5$ et $x = -3$.

Correction de l'exercice 12 - Une équation par balayage

La fonction $x \mapsto 1,05^x$ est strictement croissante, car $1,05 > 1$: l'équation a une seule solution, que l'on encadre par essais.

Les entiers d'abord : $1,05^{14} \approx 1,9799$ et $1,05^{15} \approx 2,0789$, donc la solution est entre 14 et 15. Puis les dixièmes :

$$1,05^{14,2} \approx 1,9993 < 2 < 1,05^{14,3} \approx 2,0090$$

La solution est donc entre 14,2 et 14,3, plus proche de 14,2. Interprétation : un capital placé à 5 % double en un peu plus de 14 ans, ce que confirme la règle de 72 ($\frac{72}{5} = 14,4$).

Réponse : $x \approx 14,2$.

Réponse. $x \approx 14,2$.

Correction de l'exercice 13 - Comparer deux valeurs

On ramène les deux nombres au même exposant. Comme $1,04^{10} = (1,04^2)^5$, il suffit de comparer $1,04^2$ et 1,08.

Or $1,04^2 = 1,0816$, qui est plus grand que 1,08. Les deux nombres étant positifs, élever à la puissance 5 conserve l'ordre :

$$1,04^{10} = (1,0816)^5 > 1,08^5$$

Contrôle numérique : 1,4802 contre 1,4693. Lecture financière : 4 % par an pendant dix ans rapportent un peu plus que 8 % par an pendant cinq ans, car chaque année de 4 % se capitalise. Réponse : $1,04^{10} > 1,08^5$.

Réponse. $1,04^{10} > 1,08^5$ (environ 1,480 contre 1,469).

Correction de l'exercice 14 - Un tableau de valeurs

On remplace x par chaque valeur dans $f(x) = 500 \times 0,85^x$.

- $f(0) = 500 \times 1 = 500$, car $0,85^0 = 1$.
- $f(1) = 500 \times 0,85 = 425$, puis $f(2) = 425 \times 0,85 \approx 361$: on passe d'une valeur entière à la suivante en multipliant par 0,85.
- $f(5) = 500 \times 0,85^5 \approx 500 \times 0,443705 \approx 222$ et
 $f(10) = 500 \times 0,85^{10} \approx 500 \times 0,196874 \approx 98$.

x	0	1	2	5	10
f(x)	500	425	361	222	98

Contrôle : $f(10) = 500 \times (0,85^5)^2 = \frac{f(5)^2}{f(0)} \approx \frac{222^2}{500} \approx 98,6$, cohérent aux arrondis près.

Réponse. 500 ; 425 ; 361 ; 222 ; 98.

Correction de l'exercice 15 - Deux écritures d'un même modèle

- a) Baisser de 20 % revient à multiplier par 0,8 chaque année : $V(x) = 3\,000 \times 0,8^x$.
- b) On veut $3\,000 \times 2^{kx} = 3\,000 \times 0,8^x$ pour tout x . Comme $2^{kx} = (2^k)^x$, il faut que $2^k = 0,8$. On cherche k par balayage, la fonction $k \mapsto 2^k$ étant croissante : $2^{-0,3} \approx 0,8123$ est trop grand, $2^{-0,32} \approx 0,8011$ aussi, et

$$2^{-0,322} \approx 0,8000$$

Donc $k \approx -0,322$ et $V(x) = 3\,000 \times 2^{-0,322x}$. **Contrôle** pour $x = 1$: les deux écritures donnent environ 2 400. L'exposant négatif traduit la décroissance ; la grandeur est divisée par deux lorsque $0,322x = 1$, soit au bout d'environ 3,1 ans.

Réponse. a) $V(x) = 3\,000 \times 0,8^x$ · b) $k \approx -0,322$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une atténuation

- a) Chaque filtre retient 18 % de la tension, il en laisse donc passer 82 % : on multiplie par 0,82 à chaque filtre, d'où $V(n) = 12 \times 0,82^n$.
- b) $V(3) = 12 \times 0,82^3 \approx 12 \times 0,551368 \approx 6,62$ V et
 $V(6) = 12 \times 0,82^6 \approx 12 \times 0,304006 \approx 3,65$ V.
- c) La fonction est décroissante ; on cherche le premier n tel que $V(n) < 4$. Après 5 filtres, $V(5) \approx 4,45$ V, encore au-dessus ; après 6 filtres, $V(6) \approx 3,65$ V. La tension passe sous 4 V à partir du **sixième** filtre.
- d) Numériquement, $\frac{6,62^2}{12} \approx 3,65$. Algébriquement :

$$\frac{V(3)^2}{V(0)} = \frac{(12 \times 0,82^3)^2}{12} = \frac{144 \times 0,82^6}{12} = 12 \times 0,82^6 = V(6)$$

Traverser six filtres, c'est traverser deux fois trois filtres. Au total, six filtres font perdre environ $1 - 0,304 \approx 69,6\%$ de la tension.

Réponse. a) $V(n) = 12 \times 0,82^n$ · b) environ 6,62 V et 3,65 V · c) dès le 6^e filtre · d) parce que $0,82^6 = (0,82^3)^2$.