

Plaquette 1 - Fonctions $x \mapsto a^x$, croissance et taux moyen

Fonctions exponentielles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Règles de calcul, pour $a > 0$:

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad a^0 = 1 \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

— $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ et $a^{\frac{1}{n}}$ est la racine n -ième de a .

— **Sens de variation** de $x \mapsto a^x$: croissante si $a > 1$, décroissante si $0 < a < 1$, constante si $a = 1$.

— $a^x > 0$ pour tout x : une exponentielle ne s'annule jamais et garde un signe constant.

— **Modélisation** : une grandeur valant V_0 et évoluant de $t\%$ par période vaut

$$V(x) = V_0 \times a^x \quad \text{avec} \quad a = 1 + \frac{t}{100}$$

— **Taux moyen** sur n périodes : $1 + t_m = \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{\frac{1}{n}}$.

— Recherche de seuil : la fonction étant monotone, on encadre par balayage (tableau de valeurs).

Correction de l'exercice 1 - Règles de calcul

On applique les règles de calcul sur les puissances de même base.

a) Pour un produit, on additionne les exposants : $2^7 \times 2^{-4} = 2^{7+(-4)} = 2^3 = 8$.

b) Pour un quotient, on soustrait l'exposant du dénominateur : $\frac{5^9}{5^6} = 5^{9-6} = 5^3 = 125$.

c) Pour une puissance de puissance, on multiplie les exposants :

$$(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8 = 6\,561$$

d) L'exposant $\frac{1}{2}$ désigne la racine carrée : $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$.

Contrôle pour c) : $3^2 = 9$ et $9^4 = 6\,561$.

Réponse. a) 8 · b) 125 · c) 6 561 · d) 4.

Correction de l'exercice 2 - Sens de variation

On compare la base à 1.

a) $a = 1,25 > 1$: **croissante**.

b) $a = 0,6$, avec $0 < a < 1$: **décroissante**, les valeurs se rapprochent de 0.

c) $a = 0,98 < 1$ et le coefficient 8 est positif : **décroissante** (baisse de 2 % par unité de x).

Réponse. a) croissante · b) décroissante · c) décroissante.

Correction de l'exercice 3 - Calculer des images

On remplace x par chaque valeur dans $f(x) = 500 \times 1,06^x$.

- $f(0) = 500 \times 1,06^0 = 500$, car toute exponentielle vaut 1 en 0.
- $f(4) = 500 \times 1,06^4 \approx 500 \times 1,262\,477 \approx 631,24$.
- Un exposant négatif donne l'inverse :

$$f(-1) = 500 \times 1,06^{-1} = \frac{500}{1,06} \approx 471,70$$

Interprétation : $f(-1)$ est la valeur qu'il fallait avoir **une période avant** pour arriver à 500 après une hausse de 6 %. **Contrôle** : $471,70 \times 1,06 \approx 500$.

Réponse. 500 ; $\approx 631,24$; $\approx 471,70$.

Correction de l'exercice 4 - Modéliser une croissance

- a) Coefficient : $a = 1,07$, donc $N(x) = 240 \times 1,07^x$.
- b) $1,07^5 \approx 1,402\,552$, donc $N(5) \approx 337$ capteurs.
- c) $1,07^{2,5} \approx 1,184\,3$, donc $N(2,5) \approx 284$ capteurs.
- Interprétation : au bout de deux ans et demi, on estime 284 capteurs. C'est l'avantage de la fonction exponentielle sur une suite : elle donne un résultat pour une durée **non entière**.

Réponse. a) $N(x) = 240 \times 1,07^x$ · b) ≈ 337 · c) ≈ 284 au bout de 2,5 ans.

Correction de l'exercice 5 - Modéliser une décroissance

- a) Atténuation de 15 % : $a = 0,85$, donc $I(x) = 5 \times 0,85^x$.
- b) $0,85^4 \approx 0,522\,006$, donc $I(4) \approx 2,610$ A.
- c) Non : $0,85^x > 0$ pour tout x , donc $I(x) > 0$.
- L'intensité se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre — mais elle devient rapidement négligeable devant le bruit : après 30 tronçons, $I \approx 0,039$ A.

Réponse. a) $I(x) = 5 \times 0,85^x$ · b) $\approx 2,610$ A · c) non, elle reste strictement positive.

Correction de l'exercice 6 - Taux moyen d'évolution

- a) Le coefficient multiplicateur global est le quotient de la valeur d'arrivée par la valeur de départ : $\frac{6\,500}{4\,000} = 1,625$, soit une hausse globale de 62,5 %.
- b) Avec un taux annuel moyen t_m , on multiplie six fois par $1 + t_m$, donc $(1 + t_m)^6 = 1,625$ et

$$1 + t_m = 1,625^{\frac{1}{6}} \approx 1,084\,28$$

Le taux moyen vaut environ 8,43 % par an. **Contrôle** : $4\,000 \times 1,084\,28^6 \approx 6\,500$. Diviser 62,5 % par 6 donnerait 10,4 %, trop, car les hausses se cumulent.

Réponse. a) 1,625 · b) $t_m \approx 8,43$ % par an.

Correction de l'exercice 7 - Taux équivalent sur une autre période

- a) On cherche a tel que $a^{12} = 1,12$, donc

$$a = 1,12^{\frac{1}{12}} \approx 1,009\,49$$

b) $t = a - 1 \approx 0,00949$, soit environ 0,95 % **par mois**.

— Contrôle : $1,00949^{12} \approx 1,12$. Cohérent.

— Remarque : $\frac{12}{12} = 1$ % par mois donnerait une croissance annuelle de $1,01^{12} \approx 1,127$, soit 12,7 % : trop.

Réponse. a) $\approx 1,00949$ · b) environ 0,95 % par mois.

Correction de l'exercice 8 - Comparer deux modèles

— Capteur A : $A(x) = 99 - 0,05x$ (modèle affine).

— Capteur B : $B(x) = 99 \times 0,995^x$ (modèle exponentiel).

Au bout de 12 mois :

— $A(12) = 99 - 0,6 = 98,40$.

— $0,995^{12} \approx 0,9416$, donc $B(12) \approx 93,22$. Le capteur **A** est meilleur.

Au bout de 60 mois :

— $A(60) = 99 - 3 = 96,00$.

— $0,995^{60} \approx 0,7403$, donc $B(60) \approx 73,29$. Le capteur **A** reste bien meilleur.

— Lecture : une perte relative constante (0,5 % de 99, soit environ 0,5 point par mois au début) est ici dix fois plus rapide qu'une perte absolue de 0,05 point.

Réponse. À 12 mois : 98,40 contre $\approx 93,22$ · à 60 mois : 96,00 contre $\approx 73,29$: A est meilleur.

Correction de l'exercice 9 - Recherche de seuil par balayage

La fonction N est croissante, car sa base 1,07 est supérieure à 1 : il suffit de trouver deux années consécutives qui encadrent le seuil. On calcule par exemple

$$N(9) = 240 \times 1,07^9 \approx 240 \times 1,83846 \approx 441$$

puis, de la même façon :

x	9	10	11	12
$N(x)$	441	472	505	541

On a $N(10) \approx 472 < 500$ et $N(11) \approx 505 > 500$. La fonction étant croissante, le nombre de capteurs reste ensuite au-dessus de 500 : le seuil est dépassé au bout de 11 **ans**.

Réponse. 441 ; 472 ; 505 ; 541 · seuil dépassé au bout de 11 ans.

Correction de l'exercice 10 - Demi-vie

a) Coefficient $a = 0,91$; on cherche x tel que $0,91^x = 0,5$.

x	6	7	8
$0,91^x$	0,5679	0,5168	0,4703

— $0,91^7 \approx 0,5168 > 0,5$ et $0,91^8 \approx 0,4703 < 0,5$.

— La grandeur est donc réduite de moitié entre la 7^e et la 8^e heure, soit au bout de 8 **heures** en heures entières.

b) Non : l'équation $0,91^x = 0,5$ ne contient pas la valeur initiale, qui se simplifie.

— C'est la notion de **demi-vie** : pour un taux de décroissance donné, la durée de division par deux est toujours la même.

Réponse. a) au bout de 8 heures · b) non, la demi-vie est indépendante de la valeur initiale.

Correction de l'exercice 11 - Problème : refroidissement d'une pièce

a) C'est l'écart avec l'ambiante qui décroît géométriquement. L'écart initial vaut $420 - 20 = 400$ °C.

$$T(x) = 20 + 400 \times 0,89^x$$

b) $0,89^{10} \approx 0,311\,817$, donc $T(10) \approx 20 + 124,7 = 144,7$ °C.

c) Quand x augmente, $0,89^x$ se rapproche de 0 : la température se rapproche de 20 °C, la température ambiante.

— Elle ne descend jamais en dessous, ce qui rend ce modèle physiquement plus réaliste qu'une décroissance vers 0 °C.

Réponse. a) $T(x) = 20 + 400 \times 0,89^x$ · b) $\approx 144,7$ °C · c) 20 °C (température ambiante).

Correction de l'exercice 12 - Le signe du coefficient

Pour une fonction $x \mapsto k \times a^x$, on regarde la base **et** le signe de k : multiplier par un nombre négatif inverse le sens de variation.

a) $x \mapsto 1,2^x$ est croissante ($1,2 > 1$) et $k = -3$ est négatif : f est **décroissante**. On a $f(0) = -3$, $f(2) = -3 \times 1,44 = -4,32$ et $f(-1) = \frac{-3}{1,2} = -2,5$; les valeurs diminuent bien.

b) $x \mapsto 0,5^x$ est décroissante et $k = 2$ est positif : g est **décroissante**.

c) $x \mapsto 0,8^x$ est décroissante et $k = -5$ est négatif : h est **croissante**.

$$k > 0 : \text{même sens que } a^x \quad k < 0 : \text{sens contraire}$$

Contrôle pour c) : $h(0) = -5$ et $h(1) = -4$, la fonction augmente.

Réponse. a) décroissante ; -3 ; $-4,32$; $-2,5$ · b) décroissante · c) croissante.

Correction de l'exercice 13 - Transformer une écriture

On écrit chaque puissance avec une base commune, puis on applique les règles de calcul.

a) Comme $4 = 2^2$, on a $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$. Donc

$$4^x \times 2^{-x} = 2^{2x} \times 2^{-x} = 2^{2x-x} = 2^x$$

b) Comme $9 = 3^2$, $9^x = 3^{2x}$. Le quotient vaut $3^{2x-(x+1)} = 3^{x-1} = \frac{3^x}{3}$.

c) On fait apparaître le facteur commun 5^x : $5^{x+1} = 5 \times 5^x$, donc $5^{x+1} + 5^x = (5 + 1) \times 5^x = 6 \times 5^x$.

Contrôle pour $x = 1$: a) $4 \times \frac{1}{2} = 2$; b) $\frac{9}{3} = 3$; c) $25 + 5 = 30 = 6 \times 5$.

Réponse. a) $2^{2x} \times 2^{-x} = 2^x$ · b) $3^{2x-(x+1)} = 3^{x-1}$ · c) mise en facteur de 5^x .

Correction de l'exercice 14 - Intercaler un point sur la courbe

a) L'abscisse de M vaut $\frac{0+4}{2} = 2$ et son ordonnée vaut

$$\sqrt{200 \times 450} = \sqrt{90\,000} = 300$$

donc $M(2; 300)$.

b) $f(0) = k = 200$. Puis $f(4) = 200 \times a^4 = 450$, d'où $a^4 = 2,25$ et $a = 2,25^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1,5} \approx 1,2247$. Alors $f(2) = 200 \times a^2 = 200 \times 1,5 = 300$: le point M est bien sur la courbe.

Ce n'est pas un hasard : quand l'abscisse augmente régulièrement, l'ordonnée est multipliée par le même nombre ; le point du milieu en abscisse a pour ordonnée la moyenne géométrique.

c) Entre $A(0; 200)$ et $M(2; 300)$, on obtient le point d'abscisse 1 et d'ordonnée $\sqrt{200 \times 300} \approx 244,9$. **Contrôle** : $f(1) = 200 \times 1,2247 \approx 244,9$. En répétant le procédé, on construit autant de points de la courbe qu'on veut.

Réponse. a) $M(2; 300)$ · b) $k = 200$, $a = \sqrt[4]{1,5} \approx 1,2247$, et $f(2) = 300$ · c) le point $(1; \approx 244,9)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : usure d'un outil

a) Coefficient : $a = 1 - 0,018 = 0,982$, donc $d(x) = 25 \times 0,982^x$.

b) $0,982^{10} \approx 0,833\,90$, donc $d(10) \approx 20,85$ mm.

c) On cherche x tel que $25 \times 0,982^x < 20$, c'est-à-dire $0,982^x < 0,8$.

x	11	12	13
$d(x)$ (mm)	20,47	20,10	19,74

— $d(12) \approx 20,10 > 20$ et $d(13) \approx 19,74 < 20$.

— L'outil est donc mis au rebut après le 13^e **affûtage**.

Réponse. a) $d(x) = 25 \times 0,982^x$ · b) $\approx 20,85$ mm · c) après 13 affûtages.