

Plaquette 3 – Modéliser une croissance ou une décroissance

Fonctions exponentielles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le modèle.

$$V(x) = V_0 \times a^x \quad \text{avec} \quad a = 1 + \frac{t}{100}$$

- V_0 est la valeur **au départ** ($x = 0$).
- t est le taux d'évolution **par unité de x** , en pourcentage.
- $a > 1$: croissance · $0 < a < 1$: décroissance.

Évolution	Base a
+3 %	1,03
+12 %	1,12
−4 %	0,96
−25 %	0,75
doublement	2
division par deux	0,5

Changer d'unité de temps. Si a est la base pour une période, alors pour k périodes la base devient a^k , et pour une fraction $\frac{1}{k}$ de période, $a^{\frac{1}{k}}$.

Taux équivalent. Un taux annuel t correspond au taux mensuel t_m vérifiant

$$1 + t_m = (1 + t)^{\frac{1}{12}}$$

Retrouver la base à partir de deux valeurs :

$$a^{x_2 - x_1} = \frac{V(x_2)}{V(x_1)}$$

⚠ Le taux mensuel n'est **pas** le douzième du taux annuel : 12 % par an ne fait pas 1 % par mois, mais environ 0,949 %.

Correction de l'exercice 1 – Poser un modèle de croissance

a) Augmenter de 7 % revient à multiplier par $1 + 0,07 = 1,07$ chaque année. Avec la valeur de départ 4 500 :

$$V(x) = 4\,500 \times 1,07^x$$

b) Dans 6 ans, $V(6) = 4\,500 \times 1,07^6 \approx 4\,500 \times 1,500730 \approx 6\,753$ pièces.

La hausse totale est d'environ 50 %, plus que $6 \times 7 = 42$ % : chaque hausse porte sur une production déjà augmentée. Réponse : environ 6 753 **pièces**.

Réponse. a) $V(x) = 4\,500 \times 1,07^x$ · b) environ 6 753 pièces.

Correction de l'exercice 2 – Poser un modèle de décroissance

- a) Diminuer de 14 % revient à multiplier par $1 - 0,14 = 0,86$ chaque mois :
 $S(x) = 9\,000 \times 0,86^x$. La base est comprise entre 0 et 1, donc le modèle est décroissant.
- b) Dans 5 mois :

$$S(5) = 9\,000 \times 0,86^5 \approx 9\,000 \times 0,470427 \approx 4\,234 \text{ pièces}$$

La baisse totale est d'environ 53 %, moins que $5 \times 14 = 70 \%$, car chaque baisse porte sur un stock déjà réduit. Le stock se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre. Réponse : environ 4 234 **pièces**.

Réponse. a) $S(x) = 9\,000 \times 0,86^x$ · b) environ 4 234 pièces.

Correction de l'exercice 3 - Retrouver le taux

Dans un modèle $V_0 \times a^x$, la base vaut $a = 1 + t$, où t est le taux d'évolution par période. Ici $a = 1,045$, donc $t = 1,045 - 1 = 0,045$: la grandeur augmente de 4,5 % **par période**, à partir de la valeur initiale 750.

Par exemple, au bout de 10 périodes :

$$V(10) = 750 \times 1,045^{10} \approx 750 \times 1,552969 \approx 1\,165$$

soit une hausse d'environ 55,3 % sur dix périodes, plus que $10 \times 4,5 = 45 \%$.

Réponse. +4,5 % par période, à partir de 750.

Correction de l'exercice 4 - Deux valeurs pour trouver la base

Entre $x = 0$ et $x = 5$, la grandeur est multipliée cinq fois par la base a :

$$a^5 = \frac{1\,166}{800} = 1,4575 \quad \text{donc} \quad a = 1,4575^{\frac{1}{5}} \approx 1,078$$

Le taux annuel vaut environ $1,078 - 1$, soit +7,8 % **par an**, et le modèle s'écrit $V(x) = 800 \times 1,078^x$.

Contrôle : $800 \times 1,078^5 \approx 1\,165$, proche de 1 166 aux arrondis près. Ce modèle permet de prévoir, par exemple, $V(8) \approx 1\,459$.

Réponse. $a \approx 1,078$, soit environ +7,8 % par an.

Correction de l'exercice 5 - Du taux annuel au taux mensuel

Placer à un taux mensuel t_m pendant 12 mois revient à multiplier 12 fois par $1 + t_m$. Pour obtenir 6 % par an, il faut donc

$$(1 + t_m)^{12} = 1,06 \quad \text{d'où} \quad 1 + t_m = 1,06^{\frac{1}{12}} \approx 1,004868$$

Le taux mensuel équivalent vaut environ 0,487 %. Il est légèrement inférieur au douzième du taux annuel (0,5 %), car les intérêts de chaque mois produisent eux-mêmes des intérêts. **Contrôle** : un taux de 0,5 % par mois donnerait $1,005^{12} \approx 1,0617$, soit 6,17 % par an, trop.

Réponse. Environ +0,487 % par mois.

Correction de l'exercice 6 - Du taux mensuel au taux annuel

Une baisse de 3 % par mois revient à multiplier par 0,97 chaque mois. Sur douze mois, on multiplie douze fois :

$$0,97^{12} \approx 0,693842$$

Le taux annuel vaut $0,693842 - 1 \approx -0,306$, soit une baisse d'environ 30,6 % **par an**.

Ce n'est pas $12 \times 3 = 36\%$, car chaque baisse porte sur une valeur déjà réduite.

Contrôle sur un exemple : 1 000 devient environ 694, soit une perte de 306, c'est-à-dire 30,6 %.

Réponse. Environ $-30,6\%$ par an.

Correction de l'exercice 7 - Changer d'unité de temps

Une journée compte 24 heures : passer d'un jour au suivant revient à multiplier 24 fois par la base horaire 0,92. La base journalière vaut donc

$$0,92^{24} \approx 0,1352$$

et le modèle s'écrit $V(j) = 500 \times 0,1352^j$, avec j en jours. Le taux journalier vaut $0,1352 - 1 \approx -86,5\%$.

Contrôle : après un jour, $500 \times 0,1352 \approx 68$, la même valeur que $V(24)$ dans le modèle horaire. Une baisse de 8 % par heure vide presque tout en une journée. Réponse : $V(j) = 500 \times 0,1352^j$.

Réponse. $V(j) = 500 \times 0,1352^j$, soit environ $-86,5\%$ par jour.

Correction de l'exercice 8 - Un modèle semestriel

Une année compte deux semestres : la base semestrielle b vérifie $b^2 = 1,1$, donc

$$b = 1,1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1,1} \approx 1,048809$$

Le taux semestriel équivalent vaut environ 4,88 %, et le modèle en semestres s'écrit $V(s) = V_0 \times 1,0488^s$.

Ce taux est un peu inférieur à la moitié de 10 % : deux hausses de 5 % donneraient $1,05^2 = 1,1025$, soit 10,25 % par an. **Contrôle** : $1,0488^2 \approx 1,1$.

Réponse. Environ +4,88 % par semestre, soit $V(s) = V_0 \times 1,0488^s$.

Correction de l'exercice 9 - Comparer deux placements

Pour comparer, on ramène les deux placements à la même durée, un an.

— Placement A : la base annuelle vaut 1,05.

— Placement B : un an compte quatre trimestres, donc la base annuelle vaut

$$1,0125^4 \approx 1,050945$$

soit un taux annuel équivalent d'environ 5,09 %.

Le placement **B** est légèrement plus avantageux : sur 10 000 € en un an, il rapporte environ 9,45 € de plus. Ses intérêts sont versés chaque trimestre et produisent eux-mêmes des intérêts dès le trimestre suivant.

Réponse. B, avec un taux annuel équivalent d'environ 5,09 %.

Correction de l'exercice 10 - Une demi-vie

Perdre 12 % par jour revient à multiplier la masse par 0,88 chaque jour. La demi-vie est la durée x au bout de laquelle la masse est divisée par deux : $0,88^x = 0,5$.

La fonction $x \mapsto 0,88^x$ est décroissante ; on encadre par balayage. Pour $x = 5$, $0,88^5 \approx 0,5277$; pour $x = 6$, $0,88^6 \approx 0,4644$. Puis, au dixième :

$$0,88^{5,4} \approx 0,5014 > 0,5 > 0,88^{5,5} \approx 0,4934$$

La demi-vie vaut environ 5,4 **jours**. Elle ne dépend pas de la masse de départ. **Contrôle** :

après deux demi-vies, soit 10,8 jours, il reste environ un quart de la masse ($0,88^{10,8} \approx 0,2514$).

Réponse. Environ 5,4 jours.

Correction de l'exercice 11 - Un temps de doublement

Une croissance de 3,5 % par an revient à multiplier par 1,035 chaque année. La population double lorsque $1,035^x = 2$.

On encadre par essais : $1,035^{20} \approx 1,9898$, encore inférieur à 2, et $1,035^{21} \approx 2,0594$. La fonction étant croissante, le doublement a lieu entre 20 et 21 ans : il est atteint au cours de la **vingt et unième année**.

La règle de 72 donne $\frac{72}{3,5} \approx 20,6$, ce qui concorde. Pour tripler, il faudrait environ 32 ans : tripler prend plus de temps que doubler, mais moins que deux doublements.

Réponse. Environ 21 ans.

Correction de l'exercice 12 - Modéliser à partir d'un relevé

Entre $x = 0$ et $x = 4$, la grandeur est multipliée quatre fois par la base a :

$$a^4 = \frac{1\,260}{2\,400} = 0,525 \quad \text{donc} \quad a = 0,525^{\frac{1}{4}} \approx 0,8512$$

Le modèle s'écrit $V(x) = 2\,400 \times 0,8512^x$, et le taux annuel vaut $0,8512 - 1 \approx -14,9\%$.

Contrôle : $2\,400 \times 0,8512^4 \approx 1\,260$. Le modèle prévoit par exemple $V(6) \approx 915$. Réponse : une baisse d'environ 14,9 % **par an**.

Réponse. $V(x) = 2\,400 \times 0,8512^x$, soit environ $-14,9\%$ par an.

Correction de l'exercice 13 - Distinguer deux modèles

Pour un modèle **affine**, on ajoute toujours le même nombre : les différences sont constantes. Pour un modèle **exponentiel**, on multiplie toujours par le même nombre : les quotients sont constants.

— Relevé A : les différences valent 60, 60 et 60. Le modèle est affine, $A(x) = 500 + 60x$.

— Relevé B : les quotients valent

$$\frac{560}{500} = 1,12 \quad \frac{627}{560} \approx 1,1196 \quad \frac{702}{627} \approx 1,1196$$

Ils sont tous égaux à 1,12 aux arrondis près : le modèle est exponentiel, $B(x) = 500 \times 1,12^x$. **Contrôle** : $500 \times 1,12^3 \approx 702,5$. Réponse : le relevé **B** est exponentiel.

Réponse. Le relevé B (quotients constants à 1,12) ; A est affine.

Correction de l'exercice 14 - Deux modèles qui se croisent

On compare les valeurs des deux modèles rang par rang. Aux rangs 0 et 1, ils sont égaux (500, puis 560). Au rang 2 :

$$A(2) = 620 \quad B(2) = 500 \times 1,12^2 = 627,2$$

B passe devant dès le rang 2, et l'écart ne fait que grandir : au rang 5, 800 contre environ 881 ; au rang 10, 1 100 contre environ 1 553 ; au rang 20, 1 700 contre environ 4 824, près de trois fois plus.

Le modèle affine ajoute toujours 60, alors que le gain du modèle exponentiel augmente à

chaque période. Réponse : B dépasse A **dès le rang 2**.

Réponse. Dès le rang 2 (627 contre 620).

Correction de l'exercice 15 - Un modèle à valider

Pour valider un modèle, on compare ses prévisions aux mesures.

- En $x = 2$: $1\,000 \times 1,05^2 = 1\,102,5$, pour une mesure de 1 103.
- En $x = 4$: $1\,000 \times 1,05^4 \approx 1\,215,5$, pour une mesure de 1 216.
- En $x = 6$: $1\,000 \times 1,05^6 \approx 1\,340,1$, pour une mesure de 1 340.

Les écarts valent au plus 0,5, soit moins de 0,05 % des valeurs mesurées : ils s'expliquent par les arrondis des mesures. Le modèle **convient**, et il prévoit par exemple $V(10) \approx 1\,629$.

Réponse. Oui : les écarts sont inférieurs à 0,05 %.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : la valeur d'un équipement

- a) Perdre 17 % revient à multiplier par 0,83 chaque année : $V(x) = 48\,000 \times 0,83^x$. Au bout de 3 ans, $V(3) = 48\,000 \times 0,83^3 \approx 48\,000 \times 0,571787 \approx 27\,446$ €.
- b) La moitié du prix d'achat vaut 24 000 €. Au bout de 3 ans, l'équipement vaut encore 27 446 € ; au bout de 4 ans, $48\,000 \times 0,83^4 \approx 22\,780$ €. La fonction étant décroissante, il vaut moins de la moitié de son prix à partir de la **quatrième année** (la demi-vie précise vaut environ 3,72 ans).
- c) Le taux mensuel t_m vérifie $(1 + t_m)^{12} = 0,83$:

$$1 + t_m = 0,83^{\frac{1}{12}} \approx 0,984592$$

soit une baisse d'environ 1,541 % par mois, un peu plus que le douzième de 17 % (1,417 %).

- d) Au bout de 5 ans, l'équipement vaut $48\,000 \times 0,83^5 \approx 18\,907$ €. Il a perdu environ 29 093 €, soit en moyenne $\frac{29\,093}{5} \approx 5\,819$ € par an. Un amortissement linéaire sur 5 ans compte $\frac{48\,000}{5} = 9\,600$ € par an et ramène la valeur comptable à 0 € : à la revente, l'entreprise dégagera une plus-value comptable d'environ 18 907 €.

Réponse. a) $V(x) = 48\,000 \times 0,83^x$, environ 27 446 € · b) dès la 4^e année · c) environ -1,541 % par mois · d) environ 5 819 € de perte annuelle moyenne, contre 9 600 € en linéaire.