

Plaquette 5 – Problèmes techniques : atténuation, usure, charge

Fonctions exponentielles – Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le modèle et ses quatre questions.

$$V(x) = V_0 \times a^x$$

1. **Calculer une valeur** : substituer x . 2. **Retrouver la base** : $a = \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{\frac{1}{n}}$. 3.

Chercher un seuil : balayage, la fonction étant monotone. 4. **Cumuler** : somme géométrique $V_0 \times \frac{1-a^n}{1-a}$ (pour n termes).

Grandeurs de la filière.

Situation	Modèle	Base typique
atténuation d'un signal par n éléments	$V_0 a^n$	$a < 1$
usure d'un outil	$V_0 a^n$	$a < 1$
refroidissement vers l'air ambiant	$\theta_{\text{air}} + (\theta_0 - \theta_{\text{air}})a^t$	$a < 1$
charge d'un condensateur	$U_{\text{max}}(1 - a^t)$	$a < 1$

Décalage d'origine. Quand la grandeur tend vers une valeur L non nulle, on modélise l'écart :

$$V(x) = L + (V_0 - L) \times a^x$$

C'est l'écart, et non la grandeur, qui suit un modèle exponentiel pur.

Demi-vie T : durée au bout de laquelle la grandeur (ou l'écart) est divisée par deux. Elle vérifie $a^T = 0,5$ et ne dépend **pas** de la valeur initiale.

△ Un modèle exponentiel ne s'annule jamais : une pièce n'atteint jamais exactement la température ambiante, un condensateur jamais exactement sa tension maximale. On raisonne toujours en **seuil pratique** (à 1 % près, par exemple).

Correction de l'exercice 1 – Atténuation dans une fibre

a) Atténuer de 4 % par kilomètre revient à multiplier la puissance par $1 - 0,04 = 0,96$ à chaque kilomètre. Avec une puissance d'entrée de 80 mW :

$$P(x) = 80 \times 0,96^x$$

b) Au bout de 15 km, $P(15) = 80 \times 0,96^{15} \approx 80 \times 0,542086 \approx 43,4$ mW.

La perte vaut environ 45,8 %, moins que $15 \times 4 = 60$ %, car chaque kilomètre atténue une puissance déjà réduite. Réponse : environ 43,4 mW.

Réponse. a) $P(x) = 80 \times 0,96^x$ · b) environ 43,4 mW.

Correction de l'exercice 2 – Portée maximale

La liaison fonctionne tant que la puissance reçue vaut au moins 10 mW :

$$80 \times 0,96^x \geq 10 \Leftrightarrow 0,96^x \geq 0,125$$

La fonction est décroissante ; on cherche la plus grande longueur entière qui convient. À 50 km, $0,96^{50} \approx 0,1299$: la puissance vaut environ 10,39 mW, c'est suffisant. À 51 km, elle vaut environ 9,98 mW, c'est insuffisant.

La liaison peut donc atteindre 50 **km**. En pratique, on garderait une marge : à 45 km, la puissance reçue vaut encore environ 12,7 mW.

Réponse. 50 km au maximum.

Correction de l'exercice 3 - Retrouver l'atténuation

Sur 20 km, la puissance est multipliée 20 fois par le coefficient kilométrique a , et elle passe de 100 à 61 mW :

$$a^{20} = \frac{61}{100} = 0,61 \quad \text{d'où} \quad a = 0,61^{\frac{1}{20}} \approx 0,9756$$

L'atténuation vaut $1 - 0,9756$, soit environ 2,4 % **par kilomètre**. **Contrôle :**
 $100 \times 0,9756^{20} \approx 61$ mW.

Cette fibre est de meilleure qualité que la précédente (4 % par kilomètre) : avec une entrée de 100 mW, la puissance resterait au-dessus de 10 mW sur environ 93 km.

Réponse. Environ 2,4 % par kilomètre.

Correction de l'exercice 4 - Usure d'un outil

a) Perdre 0,8 % du diamètre revient à le multiplier par $1 - 0,008 = 0,992$ à chaque affûtage : $D(n) = 12 \times 0,992^n$.

b) Après 30 affûtages :

$$D(30) = 12 \times 0,992^{30} \approx 12 \times 0,785869 \approx 9,43 \text{ mm}$$

L'outil a perdu environ 2,57 mm, soit 21,4 % de son diamètre, moins que $30 \times 0,8 = 24$ %, car chaque affûtage porte sur un diamètre déjà réduit. Réponse : environ 9,43 **mm**.

Réponse. a) $D(n) = 12 \times 0,992^n$ · b) environ 9,43 mm.

Correction de l'exercice 5 - Fin de vie de l'outil

L'outil reste utilisable tant que $D(n) = 12 \times 0,992^n \geq 10$, c'est-à-dire tant que $0,992^n \geq 0,8333$.

La fonction étant décroissante, on cherche le dernier entier qui convient. Après 22 affûtages, $0,992^{22} \approx 0,8380$: le diamètre vaut environ 10,06 mm. Après 23 affûtages, $0,992^{23} \approx 0,8313$: il vaut environ 9,98 mm, sous le seuil.

$$9,98 < 10 < 10,06$$

On peut donc faire 22 **affûtages**. Avec un affûtage par semaine, l'outil dure environ cinq mois.

Réponse. 22 affûtages.

Correction de l'exercice 6 - Refroidissement

a) C'est l'**écart** entre la pièce et l'air qui diminue de 9 % par minute, pas la température elle-même. L'écart initial vaut $320 - 20 = 300$ °C, et il est multiplié par 0,91 chaque minute : il vaut $300 \times 0,91^t$. La température est l'air plus cet écart :

$$\theta(t) = 20 + 300 \times 0,91^t$$

b) Au bout de 10 min, l'écart vaut $300 \times 0,91^{10} \approx 300 \times 0,389416 \approx 116,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$, donc $\theta(10) \approx 136,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Appliquer le coefficient à la température entière donnerait $320 \times 0,91^{10} \approx 124,6 \text{ }^{\circ}\text{C}$, à tort. **Contrôle** : la température reste au-dessus de $20 \text{ }^{\circ}\text{C}$, celle de l'air.

Réponse. a) $\theta(t) = 20 + 300 \times 0,91^t$ · b) environ $136,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Correction de l'exercice 7 - Seuil de refroidissement

La pièce est manipulable lorsque $\theta(t) < 50$. On isole l'écart, qui suit le modèle exponentiel :

$$20 + 300 \times 0,91^t < 50 \Leftrightarrow 300 \times 0,91^t < 30 \Leftrightarrow 0,91^t < 0,1$$

La fonction étant décroissante, on encadre par essais. Après 24 min, $0,91^{24} \approx 0,1040$: la pièce est encore à environ $51,2 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Après 25 min, $0,91^{25} \approx 0,0946$: elle est à environ $48,4 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Il faut donc attendre 25 **minutes**. L'écart à l'air est divisé par deux environ toutes les 7,35 minutes ($0,91^{7,35} \approx 0,5$).

Réponse. Environ 25 minutes.

Correction de l'exercice 8 - Charge d'un condensateur

a) L'écart entre 24 V et la tension vaut 24 V au départ, et il diminue de 28 % par seconde, c'est-à-dire qu'il est multiplié par 0,72 chaque seconde : il vaut $24 \times 0,72^t$. La tension est 24 V moins cet écart :

$$u(t) = 24 - 24 \times 0,72^t = 24(1 - 0,72^t)$$

b) $0,72^5 \approx 0,193492$, donc $u(5) \approx 24 \times 0,806508 \approx 19,36 \text{ V}$.

Au bout de 5 secondes, le condensateur est chargé à environ 80,7 %. **Contrôle** : la tension reste inférieure à 24 V, valeur dont elle se rapproche sans jamais l'atteindre.

Réponse. a) $u(t) = 24(1 - 0,72^t)$ · b) environ 19,36 V.

Correction de l'exercice 9 - Temps de charge à 99 %

On veut $u(t) \geq 0,99 \times 24 = 23,76 \text{ V}$, c'est-à-dire un écart à 24 V inférieur à 0,24 V :

$$24 \times 0,72^t \leq 0,24 \Leftrightarrow 0,72^t \leq 0,01$$

La fonction est décroissante. Pour $t = 14$, $0,72^{14} \approx 0,01006$, encore un peu trop ; pour $t = 15$, $0,72^{15} \approx 0,00724$. La tension atteint donc 99 % de 24 V au bout d'environ 15 **secondes** (elle vaut alors environ 23,83 V).

Atteindre exactement 24 V demanderait un temps infini, puisque l'écart ne s'annule jamais : en pratique, on considère la charge terminée à 99 %.

Réponse. Environ 15 secondes.

Correction de l'exercice 10 - Deux fibres à comparer

La proportion de puissance restante après 40 km est le coefficient kilométrique élevé à la puissance 40.

- Fibre A : $0,97^{40} \approx 0,2957$, soit environ 29,6 % de la puissance.
- Fibre B :

$$0,95^{40} \approx 0,1285$$

soit environ 12,9 %.

La fibre A transmet environ 2,3 fois plus de puissance. Avec B, il faudrait sans doute un amplificateur intermédiaire, dont le coût annule souvent l'économie sur la fibre. Pour garder autant de puissance qu'avec A sur 40 km, la fibre B ne doit pas dépasser environ 24 km ($0,95^{24} \approx 0,292$).

Réponse. Environ 29,6 % avec A, 12,9 % avec B.

Correction de l'exercice 11 - Une décharge

a) Perdre 7 % par heure revient à multiplier par 0,93 : $U(t) = 48 \times 0,93^t$. Après 12 h :

$$U(12) = 48 \times 0,93^{12} \approx 48 \times 0,418596 \approx 20,1 \text{ V}$$

La batterie a perdu environ 58 % de sa tension.

b) La fonction est décroissante ; on cherche le premier t tel que $U(t) < 40$. Après 2 h, $U(2) = 48 \times 0,8649 \approx 41,5 \text{ V}$, encore au-dessus ; après 3 h, $U(3) \approx 38,6 \text{ V}$. La tension descend sous 40 V au bout de 3 **heures**.

Avec une telle autodécharge, la batterie serait inutilisable au bout d'une journée : il faut la recharger régulièrement.

Réponse. a) environ 20,1 V · b) au bout de 3 heures.

Correction de l'exercice 12 - Deux modèles pour un refroidissement

a) C'est l'écart à l'air qui suit le modèle exponentiel. Il vaut $200 - 20 = 180 \text{ °C}$ au départ et $110 - 20 = 90 \text{ °C}$ au bout de 8 min : en 8 minutes, il est multiplié par $\frac{90}{180} = 0,5$. La base a vérifie donc

$$a^8 = 0,5 \quad \text{d'où} \quad a = 0,5^{\frac{1}{8}} \approx 0,917$$

L'écart baisse d'environ 8,3 % par minute, et il est divisé par deux toutes les 8 minutes.

b) Le modèle s'écrit $\theta(t) = 20 + 180 \times 0,917^t$. À 20 min, l'écart vaut $180 \times 0,917^{20} \approx 180 \times 0,1768 \approx 31,8 \text{ °C}$, donc $\theta(20) \approx 51,8 \text{ °C}$.

Contrôle : 20 minutes représentent 2,5 fois 8 minutes, donc l'écart est divisé par $2^{2,5} \approx 5,657$: $\frac{180}{5,657} \approx 31,8 \text{ °C}$.

Réponse. a) environ 0,917, soit -8,3 % par minute · b) environ 51,8 °C.

Correction de l'exercice 13 - Cumuler une production décroissante

Baisser de 4 % par mois revient à multiplier par 0,96 : les productions mensuelles forment une suite géométrique de premier terme 900 et de raison 0,96. Sur 12 mois, on additionne 12 termes :

$$900 \times \frac{1 - 0,96^{12}}{1 - 0,96} \approx 900 \times \frac{0,387290}{0,04} \approx 900 \times 9,6822 \approx 8\,714 \text{ pièces}$$

Sans baisse, la machine aurait produit $12 \times 900 = 10\,800$ pièces : la baisse coûte environ 2 086 pièces. Le douzième mois, elle ne produit plus que $900 \times 0,96^{11} \approx 574$ pièces.

Réponse : environ 8 714 **pièces**.

Réponse. Environ 8 714 pièces.

Correction de l'exercice 14 - Un entretien à planifier

Perdre 1,5 % de sa valeur par mois revient à multiplier le rendement par 0,985 : $r(t) = 88 \times 0,985^t$, en pourcentage. On nettoie dès que $r(t) < 75$, c'est-à-dire dès que

$$0,985^t < \frac{75}{88} \approx 0,8523$$

La fonction est décroissante. Au bout de 10 mois, $0,985^{10} \approx 0,8597$: le rendement vaut environ 75,7 %, encore au-dessus. Au bout de 11 mois, $0,985^{11} \approx 0,8468$: il vaut environ 74,5 %.

Le rendement passe sous 75 % au cours du onzième mois : il faut nettoyer **tous les 10 mois** environ. Par prudence, on planifierait plutôt un nettoyage tous les 9 mois, à un rendement d'environ 76,8 %.

Réponse. Tous les 10 mois environ.

Correction de l'exercice 15 - Estimer un coût d'usure

a) C'est le **taux de rebut** lui-même qui augmente de 5 % par mois : on le multiplie par 1,05 chaque mois. Avec $\tau(0) = 1,2$ (en pourcentage) pour le premier mois :

$$\tau(n) = 1,2 \times 1,05^n$$

b) Le douzième mois correspond à $n = 11$:

$\tau(11) = 1,2 \times 1,05^{11} \approx 1,2 \times 1,710339 \approx 2,05$ %. Sur 2 000 pièces, cela fait environ $0,0205 \times 2\,000 \approx 41$ pièces rebutées.

Le premier mois, il n'y en avait que $0,012 \times 2\,000 = 24$: le nombre de rebuts a augmenté d'environ 71 %. À 8 € la pièce, cela représente 328 € au douzième mois contre 192 € au premier : une révision de la machine s'impose.

Réponse. a) $\tau(n) = 1,2 \times 1,05^n$ (en %) · b) environ 41 pièces.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dimensionner une liaison optique

a) Atténuer de 3,5 % par kilomètre revient à multiplier par 0,965 à chaque kilomètre. Après 20 km : $100 \times 0,965^{20} \approx 100 \times 0,490395 \approx 49,0$ mW.

b) Chaque connecteur laisse passer 92 % de la puissance : trois connecteurs la multiplient par $0,92^3 \approx 0,7787$. Après 20 km et 3 connecteurs, il reste $49,0 \times 0,7787 \approx 38,2$ mW.

c) On cherche la plus grande longueur x telle que $100 \times 0,7787 \times 0,965^x \geq 8$, soit $0,965^x \geq \frac{8}{77,87} \approx 0,1027$. À 63 km, la puissance reçue vaut environ 8,25 mW ; à 64 km, environ 7,96 mW. La longueur maximale est **63 km**.

d) À 30 km, après les trois connecteurs, il reste $100 \times 0,965^{30} \times 0,7787 \approx 26,7$ mW. L'amplificateur porte cette puissance à $26,7 \times 15,8 \approx 422$ mW. On cherche ensuite la plus grande longueur y telle que $422 \times 0,965^y \geq 8$:

$$0,965^y \geq \frac{8}{422} \approx 0,01896$$

Pour $y = 111$, $0,965^{111} \approx 0,01917$ convient ; pour $y = 112$, 0,01850 ne convient plus. La portée totale vaut $30 + 111 = 141$ km, soit 78 km de plus qu'en c). **Contrôle** : 78 km de fibre divisent la puissance par $\frac{1}{0,965^{78}} \approx 16$, proche du gain de l'amplificateur.

Réponse. a) environ 49,0 mW · b) environ 38,2 mW · c) 63 km · d) environ 141 km au total.