

Plaquette 4 - Taux moyen et recherche de seuil

Fonctions exponentielles — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Taux moyen sur n périodes.

$$1 + t_m = \left(\frac{V_n}{V_0} \right)^{\frac{1}{n}}$$

- On calcule d'abord le **rapport** des deux valeurs, puis sa racine n -ième.
- Le taux moyen est toujours compris entre le plus petit et le plus grand des taux observés.
- Il **n'est pas** la moyenne arithmétique des taux.

Recherche de seuil par balayage. La fonction $x \mapsto V_0 a^x$ est **strictement monotone** : l'équation $V(x) = S$ a donc **au plus une** solution.

1. Encadrer par des valeurs entières : trouver n tel que $V(n)$ et $V(n + 1)$ encadrent S .
2. Affiner au dixième si l'énoncé le demande.
3. Répondre par un **entier** quand la variable est un nombre d'années ou de mois.

Sens de la réponse.

Question	Réponse attendue
« à partir de quelle année dépasse-t-on S ? »	le premier entier n tel que $V(n) > S$
« pendant combien d'années reste-t-on sous S ? »	l'entier précédent

Ordres de grandeur utiles.

$$\text{temps de doublement} \approx \frac{72}{\text{taux en \%}}$$

Algorithme de seuil.

```
def seuil(v0, a, s):
    v = v0
    n = 0
    while v < s:
        v = v * a
        n = n + 1
    return n
```

⚠ Sur une décroissance, la condition s'inverse : *while* $v > s$. Et si le seuil est inatteignable, la boucle ne s'arrête jamais.

Correction de l'exercice 1 - Un premier taux moyen

La production est multipliée par $\frac{8\,000}{5\,000} = 1,6$ en 4 ans. Avec un taux annuel moyen t_m , on multiplie quatre fois par $1 + t_m$:

$$(1 + t_m)^4 = 1,6 \quad \text{d'où} \quad 1 + t_m = 1,6^{\frac{1}{4}} \approx 1,1247$$

Le taux moyen vaut environ **+12,5 % par an. Contrôle** : $5\,000 \times 1,1247^4 \approx 8\,000$.

Diviser la hausse totale de 60 % par 4 donnerait 15 %, trop élevé : quatre hausses de 15 %

font $1,15^4 \approx 1,75$, soit +75 %.

Réponse. Environ +12,5 % par an.

Correction de l'exercice 2 - Un taux moyen de baisse

Le stock est multiplié par $\frac{7\,000}{12\,000} \approx 0,583333$ en 6 mois. Le coefficient mensuel moyen est la racine sixième de ce rapport :

$$1 + t_m = 0,583333^{\frac{1}{6}} \approx 0,914084$$

Le taux moyen vaut environ -8,6 % **par mois**. **Contrôle** : $12\,000 \times 0,9141^6 \approx 7\,000$.

La baisse totale n'est que de 41,7 %, alors que $6 \times 8,6 = 51,6$ % : chaque baisse porte sur un stock déjà réduit.

Réponse. Environ -8,6 % par mois.

Correction de l'exercice 3 - Taux moyen de trois évolutions

Un taux moyen se calcule sur les **coefficients multiplicateurs**, pas sur les taux. Les trois coefficients valent 1,12, 0,96 et 1,07 ; sur les trois ans, la grandeur est multipliée par

$$1,12 \times 0,96 \times 1,07 = 1,150464$$

Le coefficient annuel moyen est la racine cubique de ce produit : $1,150464^{\frac{1}{3}} \approx 1,0478$. Le taux moyen vaut environ +4,8 % **par an**.

La moyenne arithmétique des taux, $\frac{12 - 4 + 7}{3} = 5$ %, surestime légèrement l'évolution.

Le taux moyen est bien compris entre le plus petit taux (-4 %) et le plus grand (+12 %).

Réponse. Environ +4,8 % par an.

Correction de l'exercice 4 - Remonter à une valeur passée

Il y a 5 ans, la grandeur valait V_0 , et elle a été multipliée cinq fois par 1,06 : $V_0 \times 1,06^5 = 3\,600$. Pour remonter le temps, on **divise** par le coefficient :

$$V_0 = \frac{3\,600}{1,06^5} \approx \frac{3\,600}{1,338226} \approx 2\,690$$

Contrôle : $2\,690 \times 1,338226 \approx 3\,600$.

Retirer 6 % cinq fois à partir de 3 600 donnerait $3\,600 \times 0,94^5 \approx 2\,642$, à tort : une baisse de 6 % ne compense pas une hausse de 6 %. Réponse : environ 2 690.

Réponse. Environ 2 690.

Correction de l'exercice 5 - Un seuil de croissance

La production s'écrit $V(x) = 6\,000 \times 1,09^x$, fonction croissante car $1,09 > 1$. Elle dépasse 10 000 lorsque

$$6\,000 \times 1,09^x > 10\,000 \Leftrightarrow 1,09^x > \frac{10\,000}{6\,000} \approx 1,6667$$

Au bout de 5 ans, $1,09^5 \approx 1,5386$: la production vaut environ 9 232 unités, c'est insuffisant. Au bout de 6 ans, $1,09^6 \approx 1,6771$: elle vaut environ 10 063 unités.

La fonction étant croissante, la production reste ensuite au-dessus de 10 000. Réponse : au bout de 6 **ans**.

Réponse. Au bout de 6 ans.

Correction de l'exercice 6 - Un seuil de décroissance

Une baisse de 6 % par heure revient à multiplier par 0,94 : $A(x) = 4\,800 \times 0,94^x$, fonction décroissante. L'activité passe sous 2 000 Bq lorsque

$$0,94^x < \frac{2\,000}{4\,800} \approx 0,41667$$

Après 14 heures, $0,94^{14} \approx 0,4205$: l'activité vaut environ 2 019 Bq, encore au-dessus.

Après 15 heures, $0,94^{15} \approx 0,3953$: elle vaut environ 1 897 Bq.

Réponse : au bout de 15 **heures**. On peut aussi en déduire la demi-vie, environ 11,2 heures, car $0,94^{11,2} \approx 0,5$.

Réponse. Au bout de 15 heures.

Correction de l'exercice 7 - Affiner au dixième

D'après l'exercice précédent, la solution est entre 5 et 6. La fonction $x \mapsto 1,09^x$ étant croissante, on affine par essais : $1,09^{5,9} \approx 1,6627$, encore inférieur à 1,6667, et $1,09^6 \approx 1,6771$, supérieur. Donc $5,9 < x < 6$.

Pour savoir si l'on arrondit à 5,9 ou à 6,0, on teste le milieu :

$$1,09^{5,95} \approx 1,6699 > 1,6667$$

La solution est donc entre 5,9 et 5,95 : $x \approx 5,9$. Le seuil est franchi un peu avant la sixième année. Si la question porte sur un nombre d'années **entières**, la réponse reste 6, comme à l'exercice précédent.

Réponse. $x \approx 5,9$.

Correction de l'exercice 8 - Dérouler un algorithme

On déroule l'algorithme avec $v_0 = 6\,000$, $a = 1,09$ et $s = 10\,000$. Au départ, $v = 6\,000$ et $n = 0$; à chaque tour, v est multiplié par 1,09 et n augmente de 1.

n	1	2	3	4	5	6
v	6 540	7 129	7 770	8 469	9 232	10 063

Après le cinquième tour, $v \approx 9\,232$ est encore inférieur à 10 000 : la condition $v < s$ est vraie, la boucle continue. Après le sixième tour, $v \approx 10\,063$: la condition est fausse, la boucle s'arrête et la fonction renvoie

$$n = 6$$

On retrouve le résultat du calcul direct. La boucle s'arrête forcément, car la valeur croît sans limite.

Réponse. 6.

Correction de l'exercice 9 - Adapter l'algorithme

Pour une décroissance, on cherche le premier rang où la valeur passe **sous** le seuil : on continue donc tant qu'elle reste au-dessus, et la condition devient $v > s$.

```
def seuil(v0, a, s):
```

```
    v = v0
```

```
    n = 0
```

```
    while v > s:
```

```

v = v * a
n = n + 1
return n

```

Avec $v_0 = 4\,800$, $a = 0,94$ et $s = 2\,000$: après 14 tours, $v \approx 2\,019$, encore au-dessus du seuil ; après 15 tours, $v \approx 1\,897$. La fonction renvoie 15, comme le calcul direct.

La boucle s'arrête parce que la valeur se rapproche de 0 et que le seuil est positif ; avec un seuil négatif, elle ne s'arrêterait jamais.

Réponse. Il faut *while* $v > s$; la fonction renvoie alors 15.

Correction de l'exercice 10 – Un seuil inatteignable

La valeur v vaut $5\,000 \times 0,9^n$ après n tours. Une exponentielle ne s'annule jamais et ne change pas de signe :

$$5\,000 \times 0,9^n > 0 > -100 \quad \text{pour tout } n$$

La condition $v > s$ reste donc toujours vraie : la boucle tourne **indéfiniment**. La valeur se rapproche de 0, mais elle ne passe jamais sous 0, et encore moins sous -100 .

Avant de lancer un algorithme de seuil sur une décroissance, il faut vérifier que le seuil est strictement positif. On peut aussi ajouter une sécurité, par exemple *while* $v > s$ and $n < 100\,000$:

Réponse. La boucle tourne indéfiniment : une exponentielle reste toujours strictement positive.

Correction de l'exercice 11 – Comparer deux croissances

On ne peut pas comparer directement les hausses : elles ne portent ni sur les mêmes valeurs ni sur les mêmes durées. On calcule donc le taux annuel moyen de chaque entreprise.

— Entreprise A : le rapport vaut $\frac{2\,800}{2\,000} = 1,4$ en 3 ans, d'où $1,4^{\frac{1}{3}} \approx 1,1187$, soit environ +11,9 % par an.

— Entreprise B : le rapport vaut $\frac{6\,600}{5\,000} = 1,32$ en 4 ans :
 $1,32^{\frac{1}{4}} \approx 1,0719$

soit environ +7,2 % par an.

L'entreprise **A** croît le plus vite. Comparer les hausses en valeur (800 contre 1 600) aurait conduit à la conclusion inverse, et comparer 40 % à 32 % oublierait que les durées diffèrent.

Réponse. L'entreprise A (environ +11,9 % par an contre +7,2 %).

Correction de l'exercice 12 – Combien d'années pour tripler ?

Croître de 8 % par an revient à multiplier par 1,08 chaque année. La grandeur a triplé lorsque $1,08^x \geq 3$.

On encadre par essais : $1,08^{14} \approx 2,9372$, encore inférieur à 3, et

$$1,08^{15} \approx 3,1722 > 3$$

La fonction étant croissante, la grandeur a triplé au bout de 15 **ans**.

Pour comparaison, elle double en environ 9 ans ($1,08^9 \approx 1,999$). Passer ensuite de 2 à 3 ne demande qu'une hausse de 50 %, soit environ 5,3 ans de plus ($1,08^{5,3} \approx 1,5$) : au total,

environ 14,3 ans, ce qui donne bien 15 ans en années entières.

Réponse. Au bout de 15 ans.

Correction de l'exercice 13 - Un seuil sur un rapport

Au bout de n années, le rapport du second capital au premier vaut

$$\frac{10\,000 \times 1,06^n}{10\,000 \times 1,04^n} = \left(\frac{1,06}{1,04}\right)^n \approx 1,019231^n$$

Le capital de départ disparaît, et le rapport croît comme une exponentielle de base 1,019231. On cherche le premier n tel que ce rapport atteigne 1,25 : pour $n = 11$, il vaut environ 1,2331, c'est insuffisant ; pour $n = 12$, il vaut environ 1,2568.

Contrôle direct : au bout de 12 ans, $10\,000 \times 1,06^{12} \approx 20\,122$ € et $10\,000 \times 1,04^{12} \approx 16\,010$ €, dont le rapport vaut environ 1,257. Réponse : au bout de 12 ans.

Réponse. Au bout de 12 ans.

Correction de l'exercice 14 - Un taux moyen trompeur

On travaille sur les coefficients multiplicateurs : une hausse de 50 % multiplie par 1,5, une baisse de 50 % par 0,5. Sur deux ans, la production est multipliée par $1,5 \times 0,5 = 0,75$, soit une baisse de 25 %.

Le coefficient annuel moyen est la racine carrée de ce produit :

$$\sqrt{0,75} \approx 0,866$$

Le taux moyen vaut environ -13,4 % **par an**, et non 0 % comme le laisserait croire la moyenne des taux $\frac{50 - 50}{2}$. **Contrôle** sur 1 000 unités : on passe à 1 500, puis à 750. La baisse de 50 % porte sur une valeur plus grande que la hausse, elle fait donc perdre davantage.

Réponse. Environ -13,4 % par an, et non 0 %.

Correction de l'exercice 15 - Reconstituer un historique

a) La valeur est multipliée par $\frac{6\,500}{4\,000} = 1,625$ en 7 ans. Le coefficient annuel moyen est la racine septième de ce rapport :

$$1,625^{\frac{1}{7}} \approx 1,0718$$

soit un taux moyen d'environ +7,2 % **par an**.

b) En supposant une croissance régulière, $V(x) = 4\,000 \times 1,0718^x$, d'où $V(3) = 4\,000 \times 1,0718^3 \approx 4\,000 \times 1,2312 \approx 4\,925$.

Contrôle : $4\,000 \times 1,0718^7 \approx 6\,500$, et 4 925 est bien compris entre 4 000 et 6 500. Cette estimation suppose un rythme constant ; en réalité, il a pu varier d'une année à l'autre.

Réponse. a) environ +7,2 % par an · b) environ 4 925.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un parc d'éoliennes

a) Baisser de 1,8 % revient à multiplier par 0,982 chaque année. Avec $P(0) = 12\,500$ pour la première année : $P(n) = 12\,500 \times 0,982^n$.

b) La dixième année correspond à $n = 9$:

$P(9) = 12\,500 \times 0,982^9 \approx 12\,500 \times 0,849187 \approx 10\,615$ MWh, soit environ 15 % de moins

qu'au départ.

c) On cherche le premier n tel que $0,982^n < \frac{10\,000}{12\,500} = 0,8$. Pour $n = 12$, la production vaut environ 10 052 MWh, encore au-dessus ; pour $n = 13$, environ 9 871 MWh. La production passe sous 10 000 MWh pour $n = 13$, c'est-à-dire la **quatorzième année**.

d) La production cumulée sur dix ans est la somme de 10 termes d'une suite géométrique de raison 0,982 :

$$12\,500 \times \frac{1 - 0,982^{10}}{1 - 0,982} \approx 12\,500 \times 9,2277 \approx 115\,346 \text{ MWh}$$

La recette vaut environ $115\,346 \times 62 \approx 7\,151\,500$ €. Sans usure, le parc aurait produit 125 000 MWh, soit 7 750 000 € : l'usure coûte environ 598 500 € sur dix ans.

Réponse. a) $P(n) = 12\,500 \times 0,982^n$ · b) environ 10 615 MWh · c) à la 14^e année · d) environ 115 346 MWh, soit près de 7,15 M€.