

MATHÉMATIQUES

Fonctions exponentielles

Terminale STI2D

Fonction $x \mapsto a^x$ • Suite géométrique • Évolution relative constante
Sens de variation • Propriétés algébriques • Taux
d'évolution moyen • Racine n -ième

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe terminale** (arrêté du 26 février 2026, applicable à la rentrée 2027 ; la partie « Analyse » reprend celle du programme de 2019), partie « Analyse », section « Fonctions exponentielles ». Il couvre :

- la fonction $x \mapsto a^x$ ($a > 0$), prolongement de la suite géométrique (a^n) aux réels positifs, puis à $\mathbb{R}$ avec $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$: modèle continu d'évolution relative constante ;
- sens de variation et allure de la courbe selon a ; variations de $x \mapsto ka^x$;
- propriétés algébriques $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$, $a^{nx} = (a^x)^n$;
- exposant $\frac{1}{n}$ et taux d'évolution moyen équivalent à n évolutions successives ;
- **algorithme** : intercaler un point par moyennes arithmétique et géométrique.

Objectif : prolonger les suites géométriques par les fonctions $x \mapsto a^x$, connaître leurs variations et leurs propriétés algébriques, et calculer un taux d'évolution moyen.

Table des matières

1	Des suites géométriques aux fonctions exponentielles	3
2	Sens de variation	3
3	Propriétés algébriques	4
4	Taux d'évolution moyen	4
5	Algorithme : intercaler des points	5
6	Erreurs classiques	5
7	Fiche de synthèse	5
8	Exercices d'application	5
9	Corrigés des exercices	6

1. Des suites géométriques aux fonctions exponentielles

Fonction exponentielle de base a

Soit $a > 0$. La suite géométrique (a^n) est définie pour les entiers ; on la prolonge à tous les réels $x \geq 0$ par une fonction $x \mapsto a^x$ dont la courbe « relie » les points $(n; a^n)$, puis aux réels négatifs en posant $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. On admet que :

$$a^x > 0 \text{ pour tout réel } x, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

Évolution relative constante

Quand x augmente de 1, a^x est multiplié par a : la fonction modélise une grandeur dont le **taux d'évolution** est constant, mais en temps **continu** (on peut calculer sa valeur au bout de 2,5 heures, par exemple).

Croissance d'une culture

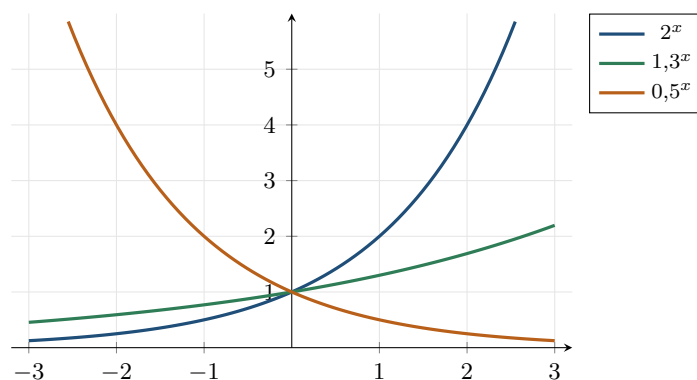
Une culture de 1 000 bactéries est multipliée par 1,5 toutes les heures : $N(t) = 1\,000 \times 1,5^t$. Au bout de 2 h 30 : $N(2,5) = 1\,000 \times 1,5^{2,5} \approx 2\,756$ bactéries.

2. Sens de variation

Variations de $x \mapsto a^x$

- Si $a > 1$, la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $0 < a < 1$, elle est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 1$, elle est constante, égale à 1.

Comme pour les suites géométriques, c'est la position de a par rapport à 1 qui décide.



Toutes les courbes passent par $(0; 1)$; croissantes si $a > 1$, décroissantes si $a < 1$.

Fonctions $x \mapsto ka^x$

Si $k > 0$, $x \mapsto ka^x$ a le même sens de variation que $x \mapsto a^x$; si $k < 0$, le sens contraire.

$f(x) = -3 \times 0,8^x$: $0,8 < 1$, donc $x \mapsto 0,8^x$ est décroissante ; $k = -3 < 0$, donc f est croissante.

3. Propriétés algébriques

Règles de calcul (admisses)

Pour $a > 0$, x et y réels, n entier relatif :

$$\boxed{a^{x+y} = a^x \times a^y} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad a^{nx} = (a^x)^n$$

Ce sont les règles des puissances entières, étendues aux exposants réels.

$$\frac{2^3 \times 2^{1,5}}{2^{0,5}} = 2^{3+1,5-0,5} = 2^4 = 16; \quad (5^{0,25})^4 = 5^1 = 5.$$

4. Taux d'évolution moyen

Racine n -ième

Pour $b > 0$ et n entier non nul, $b^{\frac{1}{n}}$ est l'unique réel positif dont la puissance n -ième vaut b :
 $\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = b.$

Taux moyen équivalent à n évolutions

Si n évolutions successives ont un coefficient multiplicateur global CM , le coefficient moyen est $CM^{\frac{1}{n}}$, et le **taux moyen** est

$$\boxed{t_m = CM^{\frac{1}{n}} - 1}$$

- Une production augmente de 20 % en 5 ans : $1,2^{\frac{1}{5}} \approx 1,0371$, soit une hausse moyenne d'environ 3,71 % par an (et non 4 %).
- Un taux annuel de 6 % équivaut à un taux mensuel de $1,06^{\frac{1}{12}} - 1 \approx 0,487\%$.

5. Algorithme : intercaler des points

Moyenne arithmétique des abscisses, géométrie des ordonnées

Entre les points $(x_1; a^{x_1})$ et $(x_2; a^{x_2})$ de la courbe, le point d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ a pour ordonnée $\sqrt{a^{x_1} \times a^{x_2}}$, la **moyenne géométrique** des ordonnées. En répétant, on construit autant de points que l'on veut.

```
from math import sqrt

def intercaler(points):
    nouveaux = [points[0]]
    for k in range(len(points) - 1):
        (x1, y1), (x2, y2) = points[k], points[k + 1]
        nouveaux.append(((x1 + x2) / 2, sqrt(y1 * y2)))
        nouveaux.append((x2, y2))
    return nouveaux

print(intercaler([(0, 1), (1, 2)])) # [(0, 1), (0.5, 1.414...), (1, 2)]
```

On retrouve $2^{0,5} = \sqrt{2}$.

6. Erreurs classiques

À éviter

- Calculer un taux moyen en divisant le taux global par n : $20\% \div 5 = 4\%$ est faux.
- Écrire $a^x \times a^y = a^{xy}$ au lieu de a^{x+y} .
- Oublier que $k < 0$ inverse le sens de variation de ka^x .
- Croire que a^x peut être négatif ou nul.

7. Fiche de synthèse

Définition	prolonge (a^n) ; $a^x > 0$; $a^0 = 1$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
Variations	$a > 1$: croissante; $0 < a < 1$: décroissante; ka^x : inversé si $k < 0$
Calcul	$a^{x+y} = a^x a^y$; $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$; $a^{nx} = (a^x)^n$
Taux moyen	$t_m = CM^{\frac{1}{n}} - 1$

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Calculs

Simplifier $A = 3^{2,5} \times 3^{1,5}$ et $B = \frac{10^{0,7}}{10^{-0,3}}$.

Exercice 2 – Variations

Donner le sens de variation de $f(x) = 5 \times 1,02^x$ et de $g(x) = -2 \times 0,6^x$.

Exercice 3 – Taux moyen

Un prix augmente de 10 %, baisse de 5 %, puis augmente de 8 %. Calculer le taux d'évolution moyen sur ces trois périodes.

Exercice 4 – Concentration

La concentration d'un médicament dans le sang est $C(t) = 20 \times 0,7^t$ (en mg/L, t en heures). Calculer $C(1,5)$ et dire comment évolue C .

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $A = 3^4 = 81$; $B = 10^{0,7+0,3} = 10^1 = 10$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $1,02 > 1$ et $5 > 0$: f est croissante. $0,6 < 1$ et $-2 < 0$: g est croissante.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $CM = 1,1 \times 0,95 \times 1,08 = 1,1286$; $1,1286^{\frac{1}{3}} \approx 1,0412$: environ +4,1 % par période.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $C(1,5) = 20 \times 0,7^{1,5} \approx 11,7$ mg/L. $0,7 < 1$ et $20 > 0$: C est décroissante (la concentration baisse de 30 % par heure).