

Plaquette 3 – Schéma de Bernoulli et triangle de Pascal : compter les chemins

Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Schéma de Bernoulli et loi binomiale.

- Un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p répond à **trois** conditions : n épreuves **identiques, indépendantes**, à **deux issues** (succès / échec) avec la même probabilité de succès p .
- Si X compte les succès, on dit que X suit la **loi binomiale** $B(n; p)$, et X prend les valeurs $0, 1, \dots, n$.
- **Probabilité d'un chemin** à k succès : $p^k \times (1 - p)^{n-k}$ — tous les chemins à k succès ont la **même** probabilité.
- **Nombre de chemins** à k succès : le coefficient lu dans la ligne n du **triangle de Pascal**, à la position k (en commençant à $k = 0$).

n	coefficients
3	$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$
4	$1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1$
5	$1 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1$
6	$1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1$
7	$1 \cdot 7 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 7 \cdot 1$
8	$1 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 70 \cdot 56 \cdot 28 \cdot 8 \cdot 1$

- **Règle de construction** : chaque coefficient est la **somme des deux** situés au-dessus de lui ; les extrémités valent 1.
- **Symétrie** : la ligne se lit indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche — il y a autant de chemins à k succès qu'à $n - k$ succès.
- **Formule finale** :

$$P(X = k) = (\text{coefficient}) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$
- **Espérance** : $E(X) = np$.
- **Contrôle** : $P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = n) = 1$.

Correction de l'exercice 1 – Reconnaître un schéma de Bernoulli

Les trois conditions à vérifier : épreuves **identiques, indépendantes**, à **deux issues** de probabilité constante.

- a) **Oui**. Le prélèvement avec remise laisse le lot inchangé : les 10 tirages sont identiques et indépendants, avec $p = 0,05$ à chaque fois. Donc X suit $B(10; 0,05)$.
- b) **Non**. Sans remise, la composition de l'urne change après chaque tirage : la probabilité de tirer une rouge passe de $\frac{4}{10}$ à $\frac{3}{9}$ ou $\frac{4}{9}$. Les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes.
- c) **Oui**. Les lancers sont indépendants, à deux issues, avec $p = 0,5$ constant. Donc X suit $B(20; 0,5)$.

d) **Non.** Le nombre d'épreuves n'est pas fixé à l'avance : il dépend du résultat. Or la loi binomiale exige un nombre n **connu** d'épreuves.

— **À retenir** : la condition la plus souvent oubliée est l'indépendance, et c'est le mot « sans remise » qui la fait tomber.

Réponse. a) oui, $B(10; 0,05)$ · b) non (sans remise) · c) oui, $B(20; 0,5)$ · d) non (n non fixé).

Correction de l'exercice 2 - Identifier n et p

Justification.

- L'expérience « prélever une pièce et regarder si elle est hors tolérance » a **deux issues** : succès (hors tolérance, probabilité 0,08) ou échec.
- On la répète 12 fois de façon **identique**.
- La production est « très importante » : retirer une pièce ne modifie pratiquement pas la proportion de pièces hors tolérance, on peut donc considérer les prélèvements comme **indépendants**.

Conclusion. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,08$, notée $B(12; 0,08)$.

Espérance.

$$E(X) = np = 12 \times 0,08 = 0,96$$

- Sur un échantillon de 12 pièces, on attend en moyenne environ **une** pièce hors tolérance.
- **Remarque importante** : la mention « production très importante » n'est pas décorative. C'est elle qui autorise à assimiler un tirage sans remise à un tirage avec remise.

Réponse. X suit $B(12; 0,08)$ et $E(X) = 0,96$.

Correction de l'exercice 3 - Compléter le triangle de Pascal

Règle du cours : chaque coefficient est la **somme des deux** coefficients situés au-dessus de lui ; les extrémités valent 1.

Ligne $n = 7$ (elle compte 8 coefficients) :

- 1 ;
- $1 + 6 = 7$;
- $6 + 15 = 21$;
- $15 + 20 = 35$;
- $20 + 15 = 35$;
- $15 + 6 = 21$;
- $6 + 1 = 7$;
- 1.
- Ligne 7 : $1 \cdot 7 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 7 \cdot 1$.

Ligne $n = 8$ (elle compte 9 coefficients), obtenue de la même façon à partir de la ligne 7 :

- $1 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 70 \cdot 56 \cdot 28 \cdot 8 \cdot 1$.
- Détail : $1 + 7 = 8$, $7 + 21 = 28$, $21 + 35 = 56$, $35 + 35 = 70$, puis la symétrie donne la fin de la ligne.
- **Contrôle** : la ligne n contient $n + 1$ coefficients et elle est symétrique. La ligne 8 a bien 9 termes qui se lisent pareil dans les deux sens.

Réponse. $n = 7 : 1 \cdot 7 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 7 \cdot 1$; $n = 8 : 1 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 70 \cdot 56 \cdot 28 \cdot 8 \cdot 1$.

Correction de l'exercice 4 - Compter les chemins

On lit la ligne $n = 5$ du triangle de Pascal : $1 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1$, les positions correspondant à $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

- a) $k = 2$: troisième coefficient, soit 10 **chemins**.
- b) $k = 3$: quatrième coefficient, soit 10 **chemins** également.
- C'est la symétrie du triangle : choisir les 2 épreuves réussies revient à choisir les 3 épreuves ratées.
- c) Le nombre total de chemins est la somme de la ligne.
- $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$.
- Contrôle : chaque épreuve a deux issues, donc l'arbre a $2^5 = 32$ chemins. Les deux comptages concordent.

Réponse. a) 10 · b) 10 · c) 32 chemins.

Correction de l'exercice 5 - Probabilité d'un chemin

Sur un chemin de l'arbre, on **multiplie** les probabilités rencontrées.

- Première suite : $0,2 \times 0,8 \times 0,2 \times 0,8 = 0,0256$.
- Deuxième suite : $0,8 \times 0,2 \times 0,8 \times 0,2 = 0,0256$ également.
- Les deux produits contiennent exactement les mêmes facteurs, dans un ordre différent : la probabilité ne dépend donc **que du nombre** de succès, pas de leur position.

$$P(\text{un chemin à } k \text{ succès}) = p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

- Ici : $0,2^2 \times 0,8^2 = 0,04 \times 0,64 = 0,0256$.
- **C'est la clé du cours** : puisque tous les chemins à k succès ont la même probabilité, il suffit de les compter — d'où le triangle de Pascal.

Réponse. 0,0256 dans les deux cas.

Correction de l'exercice 6 - Une probabilité binomiale

On applique la formule du cours :

$$P(X = k) = (\text{coefficient}) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Étape 1 — le coefficient. Ligne $n = 4$ du triangle : $1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1$. Pour $k = 2$, le coefficient vaut 6.

Étape 2 — le chemin. $0,2^2 \times 0,8^2 = 0,04 \times 0,64 = 0,0256$.

Étape 3 — le produit.

$$P(X = 2) = 6 \times 0,0256 = 0,1536$$

- **Piège** : ne pas oublier le coefficient 6. Sans lui, on ne calcule qu'un seul des six chemins possibles.

Réponse. $P(X = 2) = 0,1536$.

Correction de l'exercice 7 - Deux probabilités avec $n = 5$

Ligne $n = 5$ du triangle de Pascal : $1 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1$.

- a) Pour $k = 2$, le coefficient vaut 10.

$$P(X = 2) = 10 \times 0,3^2 \times 0,7^3 = 10 \times 0,09 \times 0,343$$

$$— P(X = 2) = 10 \times 0,03087 = 0,3087.$$

b) Pour $k = 3$, le coefficient vaut aussi 10, mais les exposants changent.

$$P(X = 3) = 10 \times 0,3^3 \times 0,7^2 = 10 \times 0,027 \times 0,49$$

$$— P(X = 3) = 10 \times 0,01323 = 0,1323.$$

— **À noter** : les deux coefficients sont égaux, mais les probabilités ne le sont pas. Comme $p < 0,5$, les petites valeurs de k sont plus probables.

Réponse. a) 0,3087 · b) 0,1323.

Correction de l'exercice 8 - La loi complète

Ligne $n = 3$ du triangle : $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$. On a $p = 0,25$ et $1 - p = 0,75$.

$$— P(X = 0) = 1 \times 0,75^3 = 0,421875.$$

$$— P(X = 1) = 3 \times 0,25 \times 0,75^2 = 3 \times 0,25 \times 0,5625 = 0,421875.$$

$$— P(X = 2) = 3 \times 0,25^2 \times 0,75 = 3 \times 0,0625 \times 0,75 = 0,140625.$$

$$— P(X = 3) = 1 \times 0,25^3 = 0,015625.$$

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,421875	0,421875	0,140625	0,015625

Contrôle.

$$— 0,421875 + 0,421875 + 0,140625 + 0,015625 = 1. \text{ La loi est correcte.}$$

— Curiosité : $P(X = 0) = P(X = 1)$. C'est un hasard de valeurs, pas une règle générale.

Réponse. 0,421875 ; 0,421875 ; 0,140625 ; 0,015625, de somme 1.

Correction de l'exercice 9 - Le cas symétrique $p = 0,5$

Ligne $n = 6$: $1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1$. Ici $p = 0,5$, donc **tous** les chemins ont la même probabilité $0,5^6 = \frac{1}{64}$.

a) **Calcul.**

$$P(X = 3) = 20 \times 0,5^6 = \frac{20}{64} = 0,3125$$

$$b) P(X = 0) = 1 \times 0,5^6 = \frac{1}{64} \approx 0,0156.$$

c) Deux raisons se rejoignent.

— Les coefficients de $k = 2$ et $k = 4$ sont égaux (15 tous les deux) par symétrie du triangle.

— Et comme $p = 1 - p = 0,5$, les chemins ont la même probabilité quel que soit k .

$$— \text{Donc } P(X = 2) = P(X = 4) = \frac{15}{64} \approx 0,2344.$$

— **À retenir** : la loi $B(n; 0,5)$ est symétrique autour de $\frac{n}{2}$. Dès que $p \neq 0,5$, cette symétrie disparaît.

Réponse. a) 0,3125 · b) $\approx 0,0156$ · c) coefficients égaux et $p = 1 - p$.

Correction de l'exercice 10 - Aucun succès, tous les succès

X , nombre de pièces défectueuses, suit $B(10; 0,04)$. Aux deux extrémités d'une ligne du triangle, le coefficient vaut 1 : ces deux probabilités se calculent sans triangle.

a) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = 0,96^{10} \approx 0,664\,833$$

— Soit environ 0,665 : dans deux prélèvements sur trois, aucune pièce n'est défectueuse.

b) **Calcul direct.**

$$P(X = 10) = 0,04^{10} \approx 1,05 \times 10^{-14}$$

— Cet événement est pratiquement impossible : il faudrait que les dix pièces prélevées soient toutes mauvaises alors que la production n'en contient que 4 %.

— **À retenir** : $P(X = 0) = (1 - p)^n$ et $P(X = n) = p^n$. Ce sont les deux cas où l'on n'a besoin d'aucun coefficient.

Réponse. a) $\approx 0,665$ · b) $0,04^{10} \approx 1,05 \times 10^{-14}$, quasi nul.

Correction de l'exercice 11 - La valeur la plus probable

a) On compare les probabilités du tableau : la plus grande est 0,360 15, obtenue pour $k = 1$.

— La valeur la plus probable est donc $X = 1$.

b) **Espérance.**

$$E(X) = np = 5 \times 0,3 = 1,5$$

— L'espérance vaut 1,5, alors que la valeur la plus probable est 1.

— **Ces deux notions sont différentes** : l'espérance est une moyenne, qui n'est même pas forcément une valeur possible ; la valeur la plus probable est le sommet de la loi.

— Contrôle du tableau :

$0,168\,07 + 0,360\,15 + 0,308\,70 + 0,132\,30 + 0,028\,35 + 0,002\,43 = 1$. La loi est cohérente.

Réponse. a) $k = 1$ · b) $E(X) = 1,5$: l'espérance n'est pas la valeur la plus probable.

Correction de l'exercice 12 - Deux prélèvements à comparer

a) **Oui, en pratique.** Le lot est très grand devant l'échantillon : après avoir retiré une pièce, la proportion de défectueuses passe de $\frac{500}{5\,000} = 0,100\,0$ à $\frac{500}{4\,999} \approx 0,100\,0$ ou $\frac{499}{4\,999} \approx 0,099\,8$.

— Ces variations sont négligeables : on assimile le tirage à un tirage **avec remise** et on utilise $B(4; 0,1)$.

b) **Non.** Le lot contient 10 pièces dont **une seule** défectueuse.

— Dès qu'on l'a prélevée, la probabilité d'en tirer une autre tombe à 0 : les épreuves ne sont pas indépendantes.

— De plus X ne peut pas dépasser 1, alors qu'une loi $B(4; 0,1)$ donne une probabilité non nulle à $X = 2$.

— **Règle pratique** : on accepte l'approximation binomiale quand l'échantillon représente moins d'un dixième environ de la population.

Réponse. a) oui (grand lot) · b) non (tirages dépendants, $X \leq 1$).

Correction de l'exercice 13 - Un système à quatre modules

a) Quatre épreuves identiques (un module chacune), indépendantes, à deux issues avec $p = 0,2$: X suit $B(4; 0,2)$.

b) Ligne $n = 4$ du triangle : $1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1$.

— $P(X = 0) = 0,8^4 = 0,4096$.

— $P(X = 1) = 4 \times 0,2 \times 0,8^3 = 4 \times 0,2 \times 0,512 = 0,4096$.

— Les deux valeurs coïncident : c'est un hasard de calcul, dû à $4 \times 0,2 = 0,8$.

c) **Espérance.**

$$E(X) = np = 4 \times 0,2 = 0,8$$

— On attend en moyenne 0,8 module en panne par mois, soit environ 10 modules en panne par an sur ce système.

Réponse. a) $B(4; 0,2)$ · b) $P(X = 0) = P(X = 1) = 0,4096$ · c) $E(X) = 0,8$.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver un paramètre

a) On part de la formule de l'espérance.

$$E(X) = np$$

— $20p = 3$, donc $p = \frac{3}{20} = 0,15$.

b) Aux extrémités, le coefficient vaut 1 :

$$P(X = 0) = (1 - p)^n = 0,85^{20} \approx 0,03876$$

— Soit environ 0,039.

— **Lecture** : avec 15 % de succès et 20 épreuves, il n'y a que 3,9 % de chances de n'obtenir **aucun** succès. Une espérance de 3 rend le zéro très improbable.

Réponse. a) $p = 0,15$ · b) $P(X = 0) \approx 0,039$.

Correction de l'exercice 15 - Un contrôle sur six pièces

X suit $B(6; 0,3)$. Ligne $n = 6$: $1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1$.

a) **Calcul.**

$$P(X = 2) = 15 \times 0,3^2 \times 0,7^4 = 15 \times 0,09 \times 0,2401$$

— $P(X = 2) = 15 \times 0,021609 = 0,324135 \approx 0,324$.

b) **Calcul.**

$$P(X = 4) = 15 \times 0,3^4 \times 0,7^2 = 15 \times 0,0081 \times 0,49$$

— $P(X = 4) = 15 \times 0,003969 = 0,059535 \approx 0,060$.

c) Les deux coefficients sont identiques (15), et pourtant $P(X = 2)$ est plus de cinq fois plus grand que $P(X = 4)$.

— La différence vient uniquement des chemins : $0,3^2 \times 0,7^4$ contre $0,3^4 \times 0,7^2$. Comme $p = 0,3 < 0,7$, remplacer deux échecs par deux succès fait chuter la probabilité.

— Cohérent avec $E(X) = 6 \times 0,3 = 1,8$: la loi est concentrée autour de 2, pas de 4.

Réponse. a) $\approx 0,324$ · b) $\approx 0,060$ · c) même coefficient, mais $p < 0,5$ favorise les petites valeurs.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un QCM répondu au hasard

a) Les 8 questions sont indépendantes, identiques, à deux issues (bonne ou mauvaise réponse), avec une probabilité de succès constante $p = \frac{1}{4} = 0,25$.

— Donc X suit $B(8; 0,25)$.

b) **Espérance.**

$$E(X) = np = 8 \times 0,25 = 2$$

— Un candidat répondant au hasard obtient en moyenne 2 bonnes réponses sur 8.

c) Ligne $n = 8$ du triangle : $1 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 70 \cdot 56 \cdot 28 \cdot 8 \cdot 1$. On a $1 - p = 0,75$.

— $P(X = 0) = 0,75^8 \approx 0,100\,113$, soit $\approx 0,100$.

— $P(X = 1) = 8 \times 0,25 \times 0,75^7 = 8 \times 0,25 \times 0,133\,484 \approx 0,266\,968$, soit $\approx 0,267$.

— $P(X = 2) = 28 \times 0,25^2 \times 0,75^6 = 28 \times 0,062\,5 \times 0,177\,979 \approx 0,311\,462$, soit $\approx 0,311$.

— $P(X = 3) = 56 \times 0,25^3 \times 0,75^5 = 56 \times 0,015\,625 \times 0,237\,305 \approx 0,207\,642$, soit $\approx 0,208$.

d) « Au moins 4 » est le contraire de « au plus 3 ».

— $P(X \leq 3) \approx 0,100\,113 + 0,266\,968 + 0,311\,462 + 0,207\,642 \approx 0,886\,185$.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,114$$

— **Conclusion** : environ 11,4 % des candidats répondant totalement au hasard seraient admis, soit près d'un sur neuf. Le barème n'est **pas** protégé du hasard.

— Pour le durcir, on pourrait exiger 5 bonnes réponses ($P(X \geq 5) \approx 0,027$) ou pénaliser les mauvaises réponses, ce qui ramène l'espérance du candidat au hasard à 0.

Réponse. a) $B(8; 0,25)$ · b) $E(X) = 2$ · c) $0,100$; $0,267$; $0,311$; $0,208$ · d) $P(X \geq 4) \approx 0,114$: le seuil n'est pas protégé.