Plaquette 4 – Au moins, au plus, entre : cumuls et seuils

Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Traduire, cumuler, franchir un seuil.

Phrase	Événement	Calcul
au moins un succès	$X \geq 1$	$1 - P(X = 0)$
aucun succès	$X = 0$	$(1-p)^n$
au plus deux	$X \leq 2$	$P(0) + P(1) + P(2)$
au moins deux	$X \geq 2$	$1 - P(0) - P(1)$
plus de deux	$X > 2$, soit $X \geq 3$	$1 - P(0) - P(1) - P(2)$
entre 2 et 4 inclus	$2 \leq X \leq 4$	$P(2) + P(3) + P(4)$

— **Règle de choix** : on additionne quand il y a peu de termes du côté demandé ; sinon on passe au **contraire**.

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$$

— **Attention aux inégalités strictes** : « plus de 2 » signifie $X \geq 3$, pas $X \geq 2$.

— **Probabilité d'un** $P(X = k)$: (coefficient de Pascal) $\times\, p^k \times (1-p)^{n-k}$.

— **Recherche d'un seuil.** Pour « au moins un succès avec la probabilité au moins s », on résout

$$1 - (1-p)^n \geq s \qquad \text{soit} \qquad (1-p)^n \leq 1 - s$$

en **tabulant** les puissances successives à la calculatrice, puis on retient le plus petit entier n qui convient.

— **Espérance** : $E(X) = np$. Elle sert de contrôle de vraisemblance : la loi est concentrée autour de np.

Correction de l'exercice 1 – Au moins une pièce défectueuse

Le nombre X de pièces défectueuses suit $B(10\,;0{,}04)$.

« Au moins une » signifie $X \geq 1$. L'événement contraire est « aucune », soit $X = 0$: un seul calcul au lieu de dix.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}96^{10}$$

— $0{,}96^{10} \approx 0{,}664\,833$.

— $P(X \geq 1) \approx 1 - 0{,}664\,833 = 0{,}335\,167$, soit environ $0{,}335$.

— Un prélèvement sur trois contient au moins une pièce défectueuse, alors que la production n'en compte que 4 %.

— **Piège** : ce n'est pas $10 \times 0{,}04 = 0{,}40$. Ce produit est l'**espérance** du nombre de défectueuses, pas une probabilité.

Réponse. $P(X \geq 1) \approx 0{,}335$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Au plus un succès

« Au plus un » signifie $X = 0$ **ou** $X = 1$: deux termes seulement, on additionne.

Ligne $n = 5$ du triangle de Pascal : $1 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1$.

— $P(X = 0) = 0{,}7^{\,5} = 0{,}168\,07$.

— $P(X = 1) = 5 \times 0{,}3 \times 0{,}7^{\,4} = 5 \times 0{,}3 \times 0{,}240\,1 = 0{,}360\,15$.

$$P(X \leq 1) = 0{,}168\,07 + 0{,}360\,15 = 0{,}528\,22$$

— Soit environ 0,528.

— Contrôle de vraisemblance : $E(X) = 5 \times 0{,}3 = 1{,}5$, la loi est centrée un peu au-dessus de 1. Il est donc normal que $P(X \leq 1)$ soit voisin de la moitié.

Réponse. $P(X \leq 1) \approx 0{,}528$.

Correction de l’exercice 3 – Au moins deux succès

« Au moins deux » couvre $X = 2, 3, 4, 5$: quatre termes. Son contraire, « au plus un », n’en compte que deux — on passe donc au contraire.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$$

— L’exercice précédent donne $P(X \leq 1) = 0{,}528\,22$.

— $P(X \geq 2) = 1 - 0{,}528\,22 = 0{,}471\,78$, soit environ 0,472.

— **Règle de méthode** : toujours compter les termes des deux côtés avant de se lancer. Ici, le contraire divise le travail par deux.

— Vérification directe : $0{,}308\,70 + 0{,}132\,30 + 0{,}028\,35 + 0{,}002\,43 = 0{,}471\,78$. Même résultat.

Réponse. $P(X \geq 2) \approx 0{,}472$.

Correction de l’exercice 4 – Entre deux et quatre

X suit $B(6\,;0{,}5)$. Comme $p = 0{,}5$, chaque chemin a la probabilité $0{,}5^{\,6} = \dfrac{1}{64}$: il suffit de compter les chemins.

Ligne $n = 6$: $1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1$.

— $k = 2$: 15 chemins ; $k = 3$: 20 ; $k = 4$: 15.

— Total : $15 + 20 + 15 = 50$ chemins sur 64.

$$P(2 \leq X \leq 4) = \frac{50}{64} = 0{,}781\,25$$

— Près de 8 lancers de 6 pièces sur 10 donnent entre 2 et 4 « pile ».

— **Attention aux bornes** : « entre 2 et 4 » est ici pris au sens large, bornes comprises. Si l’énoncé disait « strictement entre », il ne resterait que $k = 3$, soit $\dfrac{20}{64} = 0{,}312\,5$.

Réponse. $P(2 \leq X \leq 4) = \dfrac{50}{64} = 0{,}781\,25$.

Correction de l’exercice 5 – Strict ou large ?

$P(X > 2)$**.** L’inégalité est **stricte** : X vaut 3 ou 4.

— $P(X > 2) = 0{,}025\,6 + 0{,}001\,6 = 0{,}027\,2$.

$P(X \geq 2)$**.** L’inégalité est **large** : X vaut 2, 3 ou 4.

— $P(X \geq 2) = 0{,}153\,6 + 0{,}025\,6 + 0{,}001\,6 = 0{,}180\,8$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'écart.

— $0{,}180\,8 - 0{,}027\,2 = 0{,}153\,6 = P(X = 2)$, exactement la valeur ajoutée par la borne.
— **À retenir** : sur une variable à valeurs entières, « plus de 2 » se traduit par $X \geq 3$. Confondre les deux formulations fait ici une erreur de 15 points de pourcentage.

Réponse. $P(X > 2) = 0{,}027\,2$ et $P(X \geq 2) = 0{,}180\,8$; l'écart vaut $P(X = 2)$.

Correction de l'exercice 6 – Un tableau de probabilités cumulées

Une probabilité cumulée s'obtient en ajoutant les probabilités jusqu'à k inclus. Sur des fractions de même dénominateur, il suffit d'additionner les numérateurs.

— $P(X \leq 0) = \dfrac{1}{64}$.
— $P(X \leq 1) = \dfrac{1+6}{64} = \dfrac{7}{64}$.
— $P(X \leq 2) = \dfrac{7+15}{64} = \dfrac{22}{64}$.
— $P(X \leq 3) = \dfrac{22+20}{64} = \dfrac{42}{64}$.
— $P(X \leq 4) = \dfrac{42+15}{64} = \dfrac{57}{64}$.
— $P(X \leq 5) = \dfrac{57+6}{64} = \dfrac{63}{64}$.
— $P(X \leq 6) = \dfrac{63+1}{64} = \dfrac{64}{64} = 1$.

Contrôle et usage.

— La dernière valeur vaut toujours 1 : c'est la vérification du tableau.
— Ce tableau répond immédiatement à toutes les questions de cumul. Par exemple $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \dfrac{42}{64} = \dfrac{22}{64} \approx 0{,}344$.

Réponse. $\dfrac{1}{64}$; $\dfrac{7}{64}$; $\dfrac{22}{64}$; $\dfrac{42}{64}$; $\dfrac{57}{64}$; $\dfrac{63}{64}$; 1.

Correction de l'exercice 7 – Au moins deux pannes

Le nombre X de cartes en panne suit $B(6\,;0{,}1)$, et l'immobilisation correspond à $X \geq 2$.

On passe au contraire : $X \leq 1$, c'est-à-dire $X = 0$ ou $X = 1$.

— $P(X = 0) = 0{,}9^{\,6} = 0{,}531\,441$.
— $P(X = 1) = 6 \times 0{,}1 \times 0{,}9^{\,5} = 6 \times 0{,}1 \times 0{,}590\,49 = 0{,}354\,294$.
— $P(X \leq 1) = 0{,}531\,441 + 0{,}354\,294 = 0{,}885\,735$.

$$P(X \geq 2) = 1 - 0{,}885\,735 = 0{,}114\,265$$

— Soit environ 0,114 : près de 11,4 % de risque d'immobilisation dans l'année.
— Contrôle : $E(X) = 6 \times 0{,}1 = 0{,}6$ carte en panne en moyenne. Il est cohérent que « deux pannes ou plus » reste minoritaire.

Réponse. $P(X \geq 2) \approx 0{,}114$.

Correction de l'exercice 8 – Combien d'essais ?

Avec n essais, le nombre de réussites suit $B(n\,;0{,}3)$ et « au moins une réussite » se calcule par le contraire.

$$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}7^{\,n}$$

On cherche le plus petit entier n tel que $1 - 0{,}7^{\,n} \geq 0{,}95$, c'est-à-dire $0{,}7^{\,n} \leq 0{,}05$. On tabule à la calculatrice :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

n	$0{,}7^n$	**Conclusion**
7	0,082 354	trop grand
8	0,057 648	trop grand
9	0,040 354	convient

— Le plus petit entier convenable est $n = 9$.
— Avec 9 essais, la probabilité d'au moins une réussite vaut $1 - 0{,}040\,354 \approx 0{,}960$, donc bien au-delà de 0,95 ; avec 8 essais elle ne vaut que 0,942.
— **Méthode** : on ne devine pas n, on tabule les puissances jusqu'au franchissement du seuil, puis on encadre en montrant que $n - 1$ ne convient pas.

Réponse. 9 essais.

Correction de l'exercice 9 – Dimensionner un échantillon

Avec n pièces prélevées, X suit $B(n\,;0{,}05)$ et l'on veut $P(X \geq 1) \geq 0{,}90$.

$$1 - 0{,}95^n \geq 0{,}90 \qquad \text{soit} \qquad 0{,}95^n \leq 0{,}10$$

On tabule :

n	$0{,}95^n$	**Conclusion**
40	0,128 512	trop grand
44	0,104 674	trop grand
45	0,099 440	convient

— Il faut donc prélever 45 **pièces**.
— Vérification : $1 - 0{,}099\,44 \approx 0{,}900\,6 \geq 0{,}90$ pour $n = 45$, alors que $n = 44$ ne donne que 0,895.
— **Lecture industrielle** : détecter un défaut rare coûte cher en contrôle. Si le taux tombait à 1 %, il faudrait prélever plus de 200 pièces pour la même garantie.

Réponse. 45 pièces.

Correction de l'exercice 10 – Un plan de contrôle à la réception

Le nombre X de pièces défectueuses parmi les 20 prélevées suit $B(20\,;0{,}05)$. Le lot est accepté si $X \leq 1$.

— $P(X = 0) = 0{,}95^{20} \approx 0{,}358\,486$.
— $P(X = 1) = 20 \times 0{,}05 \times 0{,}95^{19} = 1 \times 0{,}377\,354 \approx 0{,}377\,354$.

$$P(X \leq 1) \approx 0{,}358\,486 + 0{,}377\,354 = 0{,}735\,840$$

— Soit environ 0,736 : un lot conforme aux 5 % annoncés est accepté dans près de trois cas sur quatre.
— Remarque de calcul : le coefficient 20 et la probabilité 0,05 se simplifient en $20 \times 0{,}05 = 1$, ce qui allège le second terme.

Réponse. $P(X \leq 1) \approx 0{,}736$.

Correction de l'exercice 11 – Risque du fournisseur, risque du client

a) L'exercice précédent donne $P(\text{accepté}) \approx 0{,}735\,840$ pour un lot à 5 %.

— Risque du fournisseur : $1 - 0{,}735\,840 \approx 0{,}264$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Environ 26,4 % des lots pourtant conformes seront refusés à tort.

b) Pour un lot à 15 %, X suit $B(20\,;0{,}15)$.

— $P(X=0) = 0{,}85^{\,20} \approx 0{,}038\,760$.

— $P(X=1) = 20 \times 0{,}15 \times 0{,}85^{\,19} = 3 \times 0{,}045\,599 \approx 0{,}136\,797$.

$$P(X \leq 1) \approx 0{,}038\,760 + 0{,}136\,797 = 0{,}175\,557$$

— Risque du client : environ 0,176, soit 17,6 % de lots dégradés acceptés.

— **Lecture** : aucun plan d'échantillonnage n'est parfait. Durcir le critère (accepter seulement si $X = 0$) ferait baisser le risque du client mais exploser celui du fournisseur. Les deux risques varient toujours en sens contraire : c'est le cœur du contrôle de réception.

Réponse. a) $\approx 0{,}264$ · b) $\approx 0{,}176$.

Correction de l'exercice 12 – Comparer deux plans

Plan A. X suit $B(10\,;0{,}05)$ et l'acceptation correspond à $X = 0$.

— $P(X=0) = 0{,}95^{\,10} \approx 0{,}598\,737$, soit environ 0,599.

Plan B. Calcul déjà mené : $P(X \leq 1) \approx 0{,}736$.

Comparaison.

— Le plan A refuse un lot conforme dans 40,1 % des cas, contre 26,4 % pour le plan B.

— Le plan A est donc **plus sévère**, alors qu'il prélève deux fois moins de pièces : exiger zéro défaut est une condition très dure dès que l'échantillon grandit.

— **Conclusion** : à taux de défauts identique, la sévérité d'un plan ne se lit pas sur la taille de l'échantillon, mais sur le couple (taille, seuil d'acceptation). Le plan B contrôle davantage de pièces tout en étant plus indulgent.

Réponse. Plan A : $\approx 0{,}599$ · Plan B : $\approx 0{,}736$; le plan A est le plus sévère.

Correction de l'exercice 13 – Une redondance à cinq modules

Le nombre X de modules opérationnels suit $B(5\,;0{,}8)$, et le calculateur fonctionne si $X \geq 2$.

On passe au contraire : $X \leq 1$.

— $P(X=0) = 0{,}2^{\,5} = 0{,}000\,32$.

— $P(X=1) = 5 \times 0{,}8 \times 0{,}2^{\,4} = 5 \times 0{,}8 \times 0{,}001\,6 = 0{,}006\,4$.

— $P(X \leq 1) = 0{,}000\,32 + 0{,}006\,4 = 0{,}006\,72$.

$$P(X \geq 2) = 1 - 0{,}006\,72 = 0{,}993\,28$$

— Soit environ 0,993 3.

— **Lecture technique** : chaque module n'est fiable qu'à 80 %, mais la règle « deux modules suffisent » porte l'ensemble à plus de 99 %. C'est le principe des calculateurs redondants en aéronautique.

— **Attention au sens de** p : ici le succès est « le module fonctionne » ($p = 0{,}8$), et non « il tombe en panne ». Se tromper de succès inverse tout le calcul.

Réponse. $P(X \geq 2) \approx 0{,}993\,3$.

Correction de l'exercice 14 – Un défaut très rare

X suit $B(500\,;0{,}001)$.

a) **Espérance.**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$E(X) = np = 500 \times 0{,}001 = 0{,}5$$

— Une carte contient en moyenne 0,5 composant défectueux.

b) **Par l'événement contraire.**

$$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}999^{\,500} \approx 1 - 0{,}606\,379 = 0{,}393\,621$$

— Soit environ 0,394 : près de 40 % des cartes portent au moins un composant défectueux.

c) L'espérance (0,5) et la probabilité d'au moins un défaut (0,394) sont proches mais **ne sont pas la même chose**.

— L'espérance compte les défauts, la probabilité compte les cartes touchées. Une carte portant deux défauts pèse 2 dans l'espérance mais 1 dans le décompte des cartes.
— **Piège classique** : écrire $P(X \geq 1) = np$. L'égalité est fausse ; elle ne devient une bonne approximation que lorsque np est très petit devant 1.

Réponse. a) $E(X) = 0{,}5$ · b) $\approx 0{,}394$ · c) l'espérance compte les défauts, la probabilité compte les cartes.

Correction de l'exercice 15 – Lire un seuil dans un tableau

a) On parcourt la ligne des cumuls jusqu'au premier dépassement de 0,95.

— $P(X \leq 3) = 0{,}886\,2 < 0{,}95$.
— $P(X \leq 4) = 0{,}972\,7 \geq 0{,}95$.
— Le plus petit entier convenable est donc $k = 4$.
— **Interprétation** : dans 97,3 % des cas, X ne dépasse pas 4. Observer 5 succès ou plus serait donc un résultat rare.

b) On utilise l'événement contraire de $X \leq 4$.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0{,}972\,7 = 0{,}027\,3$$

— Soit environ 2,7 %.
— **Méthode de lecture** : un tableau de cumuls donne $P(X \leq k)$ directement ; toute question « au moins » se ramène à $1 - P(X \leq k - 1)$, en prenant garde à décaler l'indice d'une unité.

Réponse. a) $k = 4$ · b) $P(X \geq 5) = 0{,}027\,3$.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : régler un seuil d'alerte

a) **Espérance.**

$$E(X) = np = 20 \times 0{,}10 = 2$$

— On attend 2 pièces à retoucher par prélèvement.
— Cohérence : le tableau donne $P(X \leq 2) = 0{,}676\,9$, donc la loi est bien concentrée autour de 2.

b) Alerter « à partir de k » signifie déclencher si $X \geq k$. On veut $P(X \geq k) \leq 0{,}05$, c'est-à-dire $P(X \leq k - 1) \geq 0{,}95$.

— $P(X \leq 3) = 0{,}867\,0 < 0{,}95$: insuffisant.
— $P(X \leq 4) = 0{,}956\,8 \geq 0{,}95$: convient, donc $k - 1 = 4$ et $k = 5$.
— **On alerte donc dès que** $X \geq 5$, c'est-à-dire à partir de 5 pièces à retoucher sur 20.

c) La fausse alerte, c'est alerter alors que la machine est bien réglée.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0{,}956\,8 = 0{,}043\,2$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Soit 4,32 % des heures, ce qui respecte bien la contrainte des 5 %.

d) Nombre de prélèvements par mois : $8 \times 20 = 160$ contrôles.

— Fausses alertes attendues : $160 \times 0{,}043\,2 = 6{,}912$, soit environ 7 **par mois**.

— **Lecture industrielle** : sept interventions par mois pour rien, c'est le prix d'un seuil à 5 %. Passer le seuil à $X \geq 6$ ramènerait les fausses alertes à $160 \times (1 - 0{,}988\,7) \approx 1{,}8$ par mois, mais retarderait la détection d'un vrai dérèglement. Régler un seuil d'alerte, c'est toujours arbitrer entre ces deux erreurs.

Réponse. a) $E(X) = 2$ · b) alerter dès $X \geq 5$ · c) 0,043 2 · d) environ 7 fausses alertes par mois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).