

Plaquette 5 – Problèmes contextualisés : modéliser puis décider

Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthode complète d'un problème binomial.

1. **Nommer le succès.** Une phrase précise : « la pièce est défectueuse », « le panneau fonctionne ». Tout le reste en dépend. 2. **Justifier le modèle** en citant les trois conditions : n épreuves identiques, indépendantes, à deux issues de probabilité constante p . On écrit alors X suit $B(n; p)$. 3. **Calculer** :

$$P(X = k) = (\text{coefficient de Pascal}) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X = 0) = (1 - p)^n \quad P(X \geq 1) = 1 - (1 - p)^n$$

4. **Espérance** : $E(X) = np$, le nombre moyen de succès. 5. **Conclure en français**, avec l'unité et l'ordre de grandeur : « environ 334 palettes sur 2 000 contiennent au moins un colis abîmé ». 6. **Chiffrer une décision** : effectif attendu $N \times P$, coût attendu coût unitaire $\times N \times P$.

Rappels de triangle de Pascal.

n	coefficients
4	$1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1$
5	$1 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1$
6	$1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1$
7	$1 \cdot 7 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 7 \cdot 1$
8	$1 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 70 \cdot 56 \cdot 28 \cdot 8 \cdot 1$

— Pour n plus grand, l'énoncé fournit les coefficients utiles.

Correction de l'exercice 1 - Une installation photovoltaïque

a) Le succès est « le panneau est défectueux », de probabilité $p = 0,03$.

— 12 panneaux, donc 12 épreuves **identiques**, à **deux issues**, et **indépendantes** d'après l'énoncé.

— Donc X suit $B(12; 0,03)$.

b) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = (1 - 0,03)^{12} = 0,97^{12} \approx 0,693842$$

— Soit environ 0,694 : près de 7 installations sur 10 ne comportent aucun panneau défectueux.

— Au passage, $P(X \geq 1) \approx 1 - 0,694 = 0,306$: presque une installation sur trois demandera une intervention.

c) **Espérance.**

$$E(X) = np = 12 \times 0,03 = 0,36$$

— On attend en moyenne 0,36 panneau défectueux par toiture, soit environ 36 panneaux à remplacer pour 100 installations.

Réponse. a) $B(12; 0,03)$ · b) $\approx 0,694$ · c) $E(X) = 0,36$.

Correction de l'exercice 2 - Requêtes d'un serveur

Le nombre X de requêtes en échec suit $B(15; 0,02)$.

a) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = 0,98^{15} \approx 0,738\,569$$

— Soit environ 0,739.

b) Le coefficient de Pascal pour $k = 1$ vaut toujours n , ici 15.

$$P(X = 1) = 15 \times 0,02 \times 0,98^{14} = 0,30 \times 0,753\,642 \approx 0,226\,093$$

— Soit environ 0,226.

c) « Au moins deux » est le contraire de « au plus un ».

— $P(X \leq 1) \approx 0,738\,569 + 0,226\,093 = 0,964\,662$.

$$P(X \geq 2) \approx 1 - 0,964\,662 = 0,035\,338$$

— Environ 3,5 % des séries de 15 requêtes comportent deux échecs ou plus.

— Contrôle : $E(X) = 15 \times 0,02 = 0,3$. Une loi centrée sur 0,3 rend logiquement rare l'événement « deux échecs ou plus ».

Réponse. a) $\approx 0,739$ · b) $\approx 0,226$ · c) $\approx 0,035$.

Correction de l'exercice 3 - Livraisons en retard

X suit $B(25; 0,08)$.

a) **Espérance.**

$$E(X) = np = 25 \times 0,08 = 2$$

— Deux livraisons en retard par jour en moyenne.

b) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = 0,92^{25} \approx 0,124\,364$$

— Soit environ 0,124 : seulement une journée sur huit se passe sans le moindre retard.

c) **Par l'événement contraire.**

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,124\,364 \approx 0,876$$

— Près de 88 % des journées comptent au moins un retard.

— **Lecture** : avec 8 % de retards par livraison, la quasi-certitude d'avoir un retard chaque jour n'a rien de surprenant — c'est l'effet du nombre de livraisons.

Communiquer sur « 92 % de livraisons à l'heure » et constater un retard presque tous les jours est parfaitement cohérent.

Réponse. a) $E(X) = 2$ · b) $\approx 0,124$ · c) $\approx 0,876$.

Correction de l'exercice 4 - Série de tirs

Le succès est « le tir est réussi », donc $p = 0,75$ et X suit $B(5; 0,75)$. Ligne $n = 5 : 1 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1$.

a) **Calcul.**

$$P(X = 5) = 0,75^5 \approx 0,237\,305$$

— Soit environ 0,237.

b) « Au moins quatre » signifie $X = 4$ ou $X = 5$: deux termes, on additionne.

$$- P(X = 4) = 5 \times 0,75^4 \times 0,25 = 5 \times 0,316\,406 \times 0,25 \approx 0,395\,508.$$

$$P(X \geq 4) \approx 0,395\,508 + 0,237\,305 = 0,632\,813$$

— Soit environ 0,633 : près de deux séries sur trois comptent au moins quatre réussites.

c) $E(X) = 5 \times 0,75 = 3,75$ tirs réussis en moyenne.

— **Attention au sens du succès** : si l'on avait pris « le tir est manqué » comme succès ($p = 0,25$), la question b) serait devenue « au plus un échec ». Les deux lectures donnent le même résultat, mais il faut choisir et s'y tenir.

Réponse. a) $\approx 0,237$ · b) $\approx 0,633$ · c) $E(X) = 3,75$.

Correction de l'exercice 5 - Un effet secondaire rare

X suit $B(200; 0,005)$.

a) **Espérance.**

$$E(X) = 200 \times 0,005 = 1$$

— On attend en moyenne **un** patient concerné dans l'étude.

b) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = 0,995^{200} \approx 0,366\,958$$

— Soit environ 0,367.

c) $P(X \geq 1) \approx 1 - 0,366\,958 = 0,633\,042$, soit environ 0,633.

— **Commentaire** : l'espérance vaut exactement 1, et pourtant la probabilité d'observer au moins un cas n'est que de 63 % — il reste plus d'une chance sur trois de n'en observer aucun.

— Cet écart illustre la différence entre un **nombre moyen** et une **probabilité**. Une étude qui ne relève aucun cas ne prouve donc pas l'absence d'effet secondaire : elle est compatible avec un taux de 0,5 %.

Réponse. a) $E(X) = 1$ · b) $\approx 0,367$ · c) $\approx 0,633$.

Correction de l'exercice 6 - Germination de semences

Le succès est « la graine germe », $p = 0,85$, et X suit $B(10; 0,85)$.

a) **Calcul.**

$$P(X = 10) = 0,85^{10} \approx 0,196\,874$$

— Soit environ 0,197 : à peine une fois sur cinq, la totalité du semis lève.

$$b) P(X = 9) = 10 \times 0,85^9 \times 0,15 = 10 \times 0,231\,617 \times 0,15 \approx 0,347\,425.$$

$$P(X \geq 9) \approx 0,347\,425 + 0,196\,874 = 0,544\,299$$

— Soit environ 0,544.

c) $E(X) = 10 \times 0,85 = 8,5$ graines germées en moyenne.

— **Lecture agronomique** : un taux affiché de 85 % ne garantit pas 8 ou 9 levées à chaque semis. Pour obtenir 9 plants avec une bonne marge, il faut semer davantage de graines : c'est le principe du sur-semis.

Réponse. a) $\approx 0,197$ · b) $\approx 0,544$ · c) $E(X) = 8,5$.

Correction de l'exercice 7 - Contrôle dans un bus

Le succès est « le voyageur est en infraction », $p = 0,3$, donc X suit $B(8; 0,3)$. Ligne $n = 8$: $1 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 70 \cdot 56 \cdot 28 \cdot 8 \cdot 1$.

a) « Tous en règle » signifie $X = 0$.

$$P(X = 0) = 0,7^8 \approx 0,057\,648$$

— Soit environ 0,058 : moins de 6 % des contrôles ne relèvent aucune infraction.

b) Pour $k = 2$, le coefficient vaut 28.

$$P(X = 2) = 28 \times 0,3^2 \times 0,7^6 = 28 \times 0,09 \times 0,117\,649$$

— $P(X = 2) \approx 28 \times 0,010\,588 = 0,296\,475$, soit environ 0,296.

c) $E(X) = 8 \times 0,3 = 2,4$ infractions par contrôle de 8 voyageurs.

— Cohérence : $k = 2$ est proche de l'espérance 2,4, ce qui explique que $P(X = 2)$ soit l'une des plus grandes probabilités de la loi.

Réponse. a) $\approx 0,058$ · b) $\approx 0,296$ · c) $E(X) = 2,4$.

Correction de l'exercice 8 - Durée de vie d'ampoules LED

X , nombre d'ampoules grillées, suit $B(6; 0,02)$.

a) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = 0,98^6 \approx 0,885\,842$$

— Soit environ 0,886.

b) **Par l'événement contraire.**

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,885\,842 \approx 0,114\,158$$

— Soit environ 0,114 : un luminaire sur neuf demandera une intervention.

c) On applique cette proportion au parc.

— $450 \times 0,114\,158 \approx 51,4$, soit environ 51 **luminaires** à visiter en deux ans.

— **Lecture de maintenance** : chaque ampoule est très fiable (2 % de défaillance), mais comme il en faut six par luminaire, le risque par luminaire est six fois plus élevé. C'est le même effet que pour un montage en série.

Réponse. a) $\approx 0,886$ · b) $\approx 0,114$ · c) environ 51 luminaires.

Correction de l'exercice 9 - Appels abandonnés

Le nombre X d'abandons suit $B(7; 0,2)$. Ligne $n = 7$: $1 \cdot 7 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 7 \cdot 1$.

a) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = 0,8^7 \approx 0,209\,715$$

— Soit environ 0,210.

b) Coefficient pour $k = 2$: 21.

$$P(X = 2) = 21 \times 0,2^2 \times 0,8^5 = 21 \times 0,04 \times 0,327\,68 \approx 0,275\,251$$

— Soit environ 0,275.

c) On passe par le contraire, « au plus un abandon ».

— $P(X = 1) = 7 \times 0,2 \times 0,8^6 = 1,4 \times 0,262\,144 \approx 0,367\,002$.

— $P(X \leq 1) \approx 0,209\,715 + 0,367\,002 = 0,576\,717$.

$$P(X \geq 2) \approx 1 - 0,576\,717 = 0,423\,283$$

— Soit environ 0,423.

— Contrôle : $E(X) = 7 \times 0,2 = 1,4$. Il est cohérent que « deux abandons ou plus » soit un peu moins probable que « au plus un ».

Réponse. a) $\approx 0,210$ · b) $\approx 0,275$ · c) $\approx 0,423$.

Correction de l'exercice 10 - Capteurs connectés

Le succès est « le capteur perd sa transmission », $p = 0,15$, et X suit $B(4; 0,15)$. Ligne $n = 4 : 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1$.

a) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = 0,85^4 \approx 0,522\,006$$

— Soit environ 0,522 : à peine un relevé sur deux est complet.

b) **Calcul.**

$$P(X = 1) = 4 \times 0,15 \times 0,85^3 = 0,60 \times 0,614\,125 \approx 0,368\,475$$

— Soit environ 0,368.

c) « Inexploitable » correspond à $X \geq 2$, contraire de $X \leq 1$.

— $P(X \leq 1) \approx 0,522\,006 + 0,368\,475 = 0,890\,481$.

$$P(X \geq 2) \approx 1 - 0,890\,481 = 0,109\,519$$

— Environ 11 % des relevés sont inexploitables.

— **Décision** : si la serre effectue 48 relevés par jour, cela représente environ $48 \times 0,11 \approx 5$ relevés perdus quotidiennement. Fiabiliser la transmission (passer de 15 % à 5 % de perte) ramènerait ce chiffre bien en dessous de 1.

Réponse. a) $\approx 0,522$ · b) $\approx 0,368$ · c) $\approx 0,110$.

Correction de l'exercice 11 - Un micro-sondage

X suit $B(10; 0,4)$.

a) **Espérance.**

$$E(X) = 10 \times 0,4 = 4$$

— On attend en moyenne 4 personnes favorables sur 10.

b) **Calcul.**

$$P(X = 4) = 210 \times 0,4^4 \times 0,6^6 = 210 \times 0,025\,6 \times 0,046\,656$$

— $P(X = 4) \approx 210 \times 0,001\,194 = 0,250\,823$, soit environ 0,251.

c) **Non.** La valeur 4 est la plus probable, mais elle ne survient que dans un quart des sondages environ.

— Autrement dit, trois sondages sur quatre donnent un nombre **différent** de 4, alors que la proportion réelle est bien de 40 %.

— **À retenir** : un échantillon de taille 10 fluctue énormément. C'est la raison pour laquelle les sondages réels portent sur un millier de personnes, ce qui resserre nettement la loi autour de np .

Réponse. a) $E(X) = 4$ · b) $\approx 0,251$ · c) non : la valeur la plus probable n'apparaît qu'une fois sur quatre.

Correction de l'exercice 12 - Durée de vie de roulements

Le succès est « le roulement tient », $p = 0,9$, et X suit $B(6; 0,9)$. Ligne $n = 6 : 1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1$.

a) **Calcul.**

$$P(X = 6) = 0,9^6 \approx 0,531\,441$$

— Soit environ 0,531 : à peine plus d'une machine sur deux traverse la période sans remplacement.

$$b) P(X = 5) = 6 \times 0,9^5 \times 0,1 = 6 \times 0,590\,49 \times 0,1 \approx 0,354\,294.$$

$$P(X \geq 5) \approx 0,354\,294 + 0,531\,441 = 0,885\,735$$

— Soit environ 0,886.

$$c) \text{ Avec 12 roulements : } P(X = 12) = 0,9^{12} \approx 0,282\,430, \text{ soit environ } 0,282.$$

— Doubler le nombre de roulements fait presque **diviser par deux** la probabilité que tous tiennent.

— **Conséquence de conception** : une machine complexe ne peut pas être aussi fiable que ses composants pris un par un. Il faut soit des composants nettement plus fiables, soit accepter une maintenance programmée.

Réponse. a) $\approx 0,531$ · b) $\approx 0,886$ · c) $\approx 0,282$.

Correction de l'exercice 13 - Batteries de véhicules électriques

X , nombre de batteries concernées, suit $B(5; 0,12)$. Ligne $n = 5 : 1 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1$.

a) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = 0,88^5 \approx 0,527\,732$$

— Soit environ 0,528.

b) **Calcul.**

$$P(X = 1) = 5 \times 0,12 \times 0,88^4 = 0,60 \times 0,599\,695 \approx 0,359\,817$$

— Soit environ 0,360.

c) On passe par l'**espérance**, qui donne directement le nombre moyen de batteries à remplacer.

$$— E(X) = 5 \times 0,12 = 0,6 \text{ batterie.}$$

$$— \text{Budget attendu : } 0,6 \times 6\,800 = 4\,080 \text{ €.}$$

— **Méthode** : inutile de dresser toute la loi pour un budget. L'espérance suffit, car le coût total est proportionnel au nombre de remplacements.

— **Réserve** : ce budget est une moyenne. La probabilité d'avoir au moins deux remplacements, soit plus de 13 600 €, vaut $1 - 0,527\,732 - 0,359\,817 \approx 0,112$, donc environ 11 %.

Réponse. a) $\approx 0,528$ · b) $\approx 0,360$ · c) 4 080 € en moyenne.

Correction de l'exercice 14 - Éprouvettes de béton

X suit $B(8; 0,1)$. Ligne $n = 8 : 1 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 70 \cdot 56 \cdot 28 \cdot 8 \cdot 1$.

a) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = 0,9^8 \approx 0,430\,467$$

— Soit environ 0,430.

b) $P(X = 1) = 8 \times 0,1 \times 0,9^7 = 0,8 \times 0,478\,297 \approx 0,382\,638$.

$$P(X \leq 1) \approx 0,430\,467 + 0,382\,638 = 0,813\,105$$

— Soit environ 0,813.

c) **Par l'événement contraire.**

$$P(X \geq 2) = 1 - 0,813\,105 \approx 0,186\,895$$

— Environ 18,7 % des lots seraient rejetés alors que la production est à son niveau habituel de 10 %.

— **Lecture de chantier** : près d'un lot sur cinq refusé à tort représente un coût considérable en reprises et en retards. Soit on relâche le critère (rejet à partir de trois éprouvettes), soit on améliore la formulation du béton pour descendre sous 10 %.

Réponse. a) $\approx 0,430$ · b) $\approx 0,813$ · c) $\approx 0,187$.

Correction de l'exercice 15 - Colis abîmés

Le nombre X de colis abîmés par palette suit $B(6; 0,03)$.

a) **Calcul direct.**

$$P(X = 0) = 0,97^6 \approx 0,832\,972$$

— Soit environ 0,833 ; donc $P(X \geq 1) \approx 0,167$.

b) Le coût par palette vaut $45X$. On applique $E(aX) = a \times E(X)$.

— $E(X) = 6 \times 0,03 = 0,18$ colis abîmé par palette.

— $E(45X) = 45 \times 0,18 = 8,10$ € par palette.

c) Sur 2 000 palettes :

— Coût annuel : $2\,000 \times 8,10 = 16\,200$ €.

— Palettes comportant au moins un colis abîmé : $2\,000 \times 0,167\,028 \approx 334$ palettes.

— **Deux chiffres, deux usages** : les 16 200 € servent à provisionner le budget, les 334 palettes à dimensionner le service de réclamations — une palette avec deux colis abîmés ne génère qu'une seule réclamation.

Réponse. a) $\approx 0,833$ · b) 8,10 € par palette · c) 16 200 € et environ 334 palettes.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : faut-il investir sur la ligne ?

a) Les 10 cartes d'un lot forment 10 épreuves identiques, indépendantes, à deux issues avec $p = 0,07$.

— X suit $B(10; 0,07)$ et $E(X) = 10 \times 0,07 = 0,7$ carte défectueuse par lot.

b) - $P(X = 0) = 0,93^{10} \approx 0,483\,982$, soit environ 0,484.

— $P(X = 1) = 10 \times 0,07 \times 0,93^9 = 0,70 \times 0,520\,411 \approx 0,364\,288$, soit environ 0,364.

c) Un lot est renvoyé si $X \geq 2$, contraire de $X \leq 1$.

— $P(X \leq 1) \approx 0,483\,982 + 0,364\,288 = 0,848\,270$.

$$P(X \geq 2) \approx 1 - 0,848\,270 = 0,151\,730$$

— Lots renvoyés par mois : $500 \times 0,151\,730 \approx 75,9$, soit environ 76 lots.

— Coût mensuel : $75,9 \times 120 \approx 9\,104$ €.

d) On refait le calcul avec $p = 0,04$.

- $P(X = 0) = 0,96^{10} \approx 0,664\,833$.
 - $P(X = 1) = 10 \times 0,04 \times 0,96^9 = 0,40 \times 0,692\,534 \approx 0,277\,014$.
 - $P(X \geq 2) \approx 1 - 0,664\,833 - 0,277\,014 = 0,058\,153$.
 - Lots renvoyés : $500 \times 0,058\,153 \approx 29,1$, pour un coût de $29,1 \times 120 \approx 3\,489$ €.
 - **Économie mensuelle** : $9\,104 - 3\,489 = 5\,615$ €.
 - **Amortissement** : $\frac{80\,000}{5\,615} \approx 14,2$, soit environ 15 **mois**.
 - **Conclusion** : passer de 7 % à 4 % de cartes défectueuses divise par plus de deux et demi le nombre de lots renvoyés — l'effet est bien plus fort que la baisse du taux lui-même, parce que le critère porte sur « deux défauts ou plus ». L'investissement se rembourse en un peu plus d'un an.
- Réponse.** a) $B(10; 0,07)$, $E(X) = 0,7 \cdot b) \approx 0,484$ et $\approx 0,364 \cdot c) \approx 0,152$, soit environ 9 104 € par mois · d) 5 615 € d'économie mensuelle, amortissement en 15 mois environ.