

Plaquette 1 - Triangle de Pascal, loi binomiale et espérance

Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- **Schéma de Bernoulli** : n épreuves identiques et **indépendantes**, à deux issues, avec une probabilité de succès p constante. Le nombre de succès X suit la **loi binomiale** $B(n; p)$.
- Nombre de chemins réalisant k succès parmi n : coefficient lu dans le **triangle de Pascal**.

n	coefficients
1	$1 \cdot 1$
2	$1 \cdot 2 \cdot 1$
3	$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$
4	$1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1$
5	$1 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1$
6	$1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1$

- Chaque coefficient est la **somme des deux** qui sont au-dessus de lui.
- **Probabilité** de k succès :

$$P(X = k) = (\text{coefficient}) \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

- **Espérance** : $E(X) = np$ (nombre moyen de succès).
- « Au moins un succès » : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$.
- « Au plus k » : on additionne $P(X = 0) + \dots + P(X = k)$.
- Contrôle : la somme de toutes les probabilités $P(X = k)$ vaut 1.

Correction de l'exercice 1 - Construire le triangle de Pascal

Règle du cours : chaque coefficient est la **somme des deux coefficients** situés au-dessus de lui dans la ligne précédente. Les extrémités valent toujours 1.

- 1 ;
- $1 + 6 = 7$;
- $6 + 15 = 21$;
- $15 + 20 = 35$;
- $20 + 15 = 35$;
- $15 + 6 = 21$;
- $6 + 1 = 7$;
- 1.
- Ligne $n = 7$: $1 \cdot 7 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 7 \cdot 1$.
- Contrôle : la somme vaut $128 = 2^7$, ce qui est le nombre total de chemins d'un arbre à 7 épreuves.

Réponse. $1 \cdot 7 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 7 \cdot 1$ (somme = 128).

Correction de l'exercice 2 - Reconnaître une loi binomiale

Conditions du cours : épreuves identiques, indépendantes, à deux issues, et on **compte** les succès.

- a) **Oui** : $X \sim B(20; 0,04)$. La remise garantit l'indépendance et la constance de p .
- b) **Non** : sans remise, la composition du jeu change à chaque tirage, les épreuves ne sont pas indépendantes.
- c) **Non** : Z n'est pas un nombre de succès mais une moyenne de mesures (grandeur continue).

Réponse. a) oui, $B(20; 0,04)$ · b) non · c) non.

Correction de l'exercice 3 - Calculer une probabilité binomiale

On lit le coefficient dans la ligne $n = 6$ du triangle de Pascal, position $k = 2$: c'est 15.

$$P(X = 2) = 15 \times 0,3^2 \times 0,7^4$$

- $0,3^2 = 0,09$ et $0,7^4 = 0,2401$.
- $P(X = 2) = 15 \times 0,09 \times 0,2401 \approx 0,324$.
- Contrôle de vraisemblance : $E(X) = 6 \times 0,3 = 1,8$, donc $k = 2$ est la valeur la plus probable. Une probabilité d'environ 32 % est cohérente.

Réponse. $P(X = 2) \approx 0,324$.

Correction de l'exercice 4 - Loi complète

Ligne $n = 4$ du triangle : $1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1$. Chaque chemin a la probabilité $0,5^4 = 0,0625$.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

- $P(X = 0) = 1 \times 0,0625 = 0,0625$; $P(X = 1) = 4 \times 0,0625 = 0,25$;
 $P(X = 2) = 6 \times 0,0625 = 0,375$, etc.
- Somme : $0,0625 + 0,25 + 0,375 + 0,25 + 0,0625 = 1$. La loi est complète.
- La loi est **symétrique** car $p = 0,5$.

Réponse. 0,0625 ; 0,25 ; 0,375 ; 0,25 ; 0,0625 (somme = 1).

Correction de l'exercice 5 - Espérance

Formule du cours : $E(X) = np$.

- a) $E(X) = 50 \times 0,08 = 4$ succès en moyenne.
- b) $E(Y) = 200 \times 0,015 = 3$.
- c) $E(Z) = 12 \times 0,25 = 3$.
- Interprétation : sur un grand nombre de séries de n épreuves, on obtient en moyenne np succès par série.

Réponse. a) 4 · b) 3 · c) 3.

Correction de l'exercice 6 - Au moins un succès

$X \sim B(25; 0,03)$. On passe par l'événement contraire.

- $P(X = 0) = 0,97^{25} \approx 0,46697$.

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,46697 \approx 0,533$$

- Plus d'une fois sur deux, un prélèvement de 25 pièces contient au moins un défaut, alors que le taux n'est que de 3 %.

Méthode. Pour « au moins un », l'événement contraire évite de calculer 25 termes.

Réponse. $P(X \geq 1) \approx 0,533$.

Correction de l'exercice 7 - Au plus deux succès

Ligne $n = 5$ du triangle : $1 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 1$.

- $P(X = 0) = 0,8^5 = 0,32768$.
 - $P(X = 1) = 5 \times 0,2 \times 0,8^4 = 5 \times 0,2 \times 0,4096 = 0,4096$.
 - $P(X = 2) = 10 \times 0,04 \times 0,8^3 = 10 \times 0,04 \times 0,512 = 0,2048$.
- $$P(X \leq 2) = 0,32768 + 0,4096 + 0,2048 = 0,94208 \approx 0,942$$
- Dans plus de 94 % des cas, on obtient au plus 2 succès.

Réponse. $P(X \leq 2) \approx 0,942$.

Correction de l'exercice 8 - Contrôle d'un lot

$X \sim B(10; 0,05)$. Le lot est accepté si $X \leq 1$.

- $P(X = 0) = 0,95^{10} \approx 0,59874$.
 - $P(X = 1) = 10 \times 0,05 \times 0,95^9 \approx 10 \times 0,05 \times 0,63025 \approx 0,31512$.
- $$P(X \leq 1) \approx 0,59874 + 0,31512 = 0,91386 \approx 0,914$$
- Environ 91,4 % des lots sont acceptés ; 8,6 % sont refusés.

Réponse. $P(\text{accepté}) \approx 0,914$.

Correction de l'exercice 9 - Système redondant

Soit X le nombre de modules fonctionnels : $X \sim B(5; 0,9)$. On veut $P(X \geq 4)$.

- $P(X = 5) = 0,9^5 = 0,59049$.
 - $P(X = 4) = 5 \times 0,9^4 \times 0,1 = 5 \times 0,6561 \times 0,1 = 0,32805$.
- $$P(X \geq 4) = 0,59049 + 0,32805 = 0,91854 \approx 0,919$$
- Avec l'exigence « au moins 4 sur 5 », la fiabilité du système (91,9 %) dépasse à peine celle d'un module seul (90 %) : le critère est très strict.
 - En abaissant l'exigence à « au moins 3 sur 5 », on obtiendrait 99,1 % : c'est là que la redondance devient vraiment payante.

Réponse. $P(X \geq 4) \approx 0,919$.

Correction de l'exercice 10 - Espérance et décision

- $X \sim B(1\,500; 0,02)$, donc $E(X) = 1\,500 \times 0,02 = 30$ rebuts par jour.
 - Coût moyen : $30 \times 4,50 = 135$ € par jour.
 - Avec 0,8 % : $E(X) = 1\,500 \times 0,008 = 12$ rebuts, soit $12 \times 4,50 = 54$ € par jour.
- Économie journalière : $135 - 54 = 81$ €.
 - Amortissement : $\frac{600}{81} \approx 7,4$ jours, donc le réglage est rentabilisé au bout de 8 jours.

Réponse. a) 30 rebuts · b) 135 € · c) au bout de 8 jours.

Correction de l'exercice 11 - Problème : appels d'un service

$X \sim B(8; 0,15)$. Ligne $n = 8$ du triangle de Pascal : $1 \cdot 8 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 70 \cdot 56 \cdot 28 \cdot 8 \cdot 1$.

a) $P(X = 2) = 28 \times 0,15^2 \times 0,85^6$.

— $0,15^2 = 0,0225$ et $0,85^6 \approx 0,37715$.

— $P(X = 2) \approx 28 \times 0,0225 \times 0,37715 \approx 0,238$.

b) $E(X) = 8 \times 0,15 = 1,2$ réclamation en moyenne.

c) $P(X \geq 1) = 1 - 0,85^8 \approx 1 - 0,27249 = 0,728$.

Réponse. a) $\approx 0,238$ · b) $1,2$ · c) $\approx 0,728$.

Correction de l'exercice 12 - Une ligne du triangle de Pascal

a) Chaque coefficient est la somme des deux coefficients situés au-dessus de lui, et chaque ligne commence et finit par 1. À partir de $1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1$, on obtient $1 \cdot 7 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 7 \cdot 1$ (par exemple $6 + 15 = 21$ et $15 + 20 = 35$).

b) La somme vaut

$$1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$$

C'est normal : un schéma à 7 épreuves à deux issues compte 2^7 issues en tout, chacune comptée une fois dans la ligne.

c) Le nombre d'issues avec 3 succès est le coefficient de rang 3 de la ligne 7 : 35. La ligne est symétrique : il y a aussi 35 issues avec 4 succès.

Réponse. a) $1 \cdot 7 \cdot 21 \cdot 35 \cdot 35 \cdot 21 \cdot 7 \cdot 1$ · b) $128 = 2^7$ · c) 35.

Correction de l'exercice 13 - Au moins deux succès

a) On répète 5 fois, de façon indépendante, une épreuve à deux issues (panne ou non) avec la même probabilité de succès $p = 0,2$: X suit la loi binomiale $B(5; 0,2)$.

b) $P(X = 0) = 0,8^5 = 0,32768$. Il y a 5 chemins avec un seul succès (coefficient de la ligne 5), donc $P(X = 1) = 5 \times 0,2 \times 0,8^4 = 0,4096$.

c) « Au moins deux » est le contraire de « zéro ou un » :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0,32768 - 0,4096 \approx 0,263$$

Passer par l'événement contraire évite de calculer quatre probabilités.

Réponse. a) $B(5; 0,2)$ · b) $0,32768$ et $0,4096$ · c) environ $0,263$.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver un paramètre par l'espérance

a) X suit la loi $B(20; p)$, dont l'espérance vaut $E(X) = np$. On résout

$$20p = 3 \Leftrightarrow p = \frac{3}{20} = 0,15$$

En moyenne, 15 % des pièces sont défectueuses.

b) Aucune pièce défectueuse signifie 20 échecs successifs, chacun de probabilité 0,85 : $P(X = 0) = 0,85^{20} \approx 0,039$.

Un lot de 20 pièces sans aucun défaut est donc rare (moins de 4 % des cas) : en trouver un ne prouverait pas que la chaîne s'est améliorée.

Réponse. a) $p = 0,15$ · b) environ $0,039$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : choisir un plan de contrôle

a) **Plan A** : $X \sim B(5; 0,1)$ et $P(X = 0) = 0,9^5 = 0,59049 \approx 0,590$.

— **Plan B** : $Y \sim B(10; 0,1)$.

— $P(Y = 0) = 0,9^{10} \approx 0,34868$;

— $P(Y = 1) = 10 \times 0,1 \times 0,9^9 \approx 10 \times 0,1 \times 0,38742 = 0,38742$;

— $P(Y \leq 1) \approx 0,34868 + 0,38742 = 0,7361 \approx 0,736$.

b) Le plan **A** accepte 59,0 % des lots contre 73,6 % pour le plan B : le plan A est donc **plus sévère**.

— Il exige une perfection sur un petit échantillon, alors que le plan B tolère un défaut sur un échantillon deux fois plus grand.

Réponse. a) A : $\approx 0,590$ · B : $\approx 0,736$ · b) le plan A est plus sévère.