

Plaquette 2 - Variables aléatoires : loi de probabilité et espérance

Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Variable aléatoire et espérance.

- Une **variable aléatoire** X associe un nombre à chaque issue d'une expérience. Sa **loi de probabilité** est le tableau des valeurs x_i et des probabilités $P(X = x_i)$.
- **Contrôle obligatoire** : la somme des probabilités vaut toujours 1.

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1$$

- **Espérance** de X :

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n \times P(X = x_n)$$

- **Interprétation** : sur un grand nombre de répétitions, la moyenne des valeurs obtenues se rapproche de $E(X)$. Sur N répétitions, le total attendu vaut $N \times E(X)$.
- **Jeu équitable** : un jeu est équitable lorsque l'espérance du **gain net** (gain reçu moins la mise) est nulle.
- **Changement d'échelle** : si $Y = aX + b$ (par exemple un coût $12X + 40$), alors

$$E(Y) = a \times E(X) + b$$
- **Méthode** : repérer les valeurs prises par X , calculer chaque probabilité, dresser le tableau, vérifier la somme, puis seulement calculer l'espérance.

Correction de l'exercice 1 - Compléter une loi de probabilité

Probabilité manquante. La somme des probabilités d'une loi vaut toujours 1.

- $0,15 + 0,25 + 0,20 = 0,60$.
- Donc $P(X = 1) = 1 - 0,60 = 0,40$.

Espérance. On applique la formule du cours :

$$E(X) = \sum x_i \times P(X = x_i)$$

- $E(X) = (-2) \times 0,15 + 0 \times 0,25 + 1 \times 0,40 + 3 \times 0,20$.
- $E(X) = -0,30 + 0 + 0,40 + 0,60 = 0,70$.
- Sur un grand nombre de répétitions, X vaut en moyenne 0,70.
- **Piège** : le terme $0 \times 0,25$ ne se néglige pas « parce qu'il est nul » — il faut l'écrire pour ne pas oublier une valeur dans la somme.

Réponse. $P(X = 1) = 0,40$ et $E(X) = 0,70$.

Correction de l'exercice 2 - Construire la loi d'un gain

Valeurs prises par X et probabilités. Le dé est équilibré : chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$.

- $X = 5$ pour la seule face 6 : $P(X = 5) = \frac{1}{6}$.
- $X = 1$ pour les faces 4 et 5 : $P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- $X = -2$ pour les faces 1, 2 et 3 : $P(X = -2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

x_i	-2	1	5
$P(X = x_i)$	1/2	1/3	1/6

— Contrôle : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = 1$. La loi est correcte.

Espérance.

$$E(X) = (-2) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{6}$$

— $E(X) = -1 + \frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{-6+2+5}{6} = \frac{1}{6} \approx 0,17$.

— Le jeu rapporte en moyenne environ 0,17 € par partie au joueur : il lui est légèrement **favorable**.

Réponse. $E(X) = \frac{1}{6} \approx 0,17$ €.

Correction de l'exercice 3 - Espérance d'un nombre de défauts

— Contrôle : $0,30 + 0,40 + 0,20 + 0,10 = 1$. La loi est bien définie.

$$E(X) = 0 \times 0,30 + 1 \times 0,40 + 2 \times 0,20 + 3 \times 0,10$$

— $E(X) = 0 + 0,40 + 0,40 + 0,30 = 1,10$.

— **Interprétation** : une pièce présente en moyenne 1,1 défaut. Sur 1 000 pièces, on attend donc environ 1 100 défauts à reprendre.

— Remarquer que 1,1 n'est pas une valeur possible de X : l'espérance est une **moyenne**, pas un résultat observable sur une pièce.

Réponse. $E(X) = 1,10$ défaut par pièce en moyenne.

Correction de l'exercice 4 - Ce jeu est-il équitable ?

Le **gain net** est le gain reçu diminué de la mise de 2 €.

— Gain de 10 € : gain net $10 - 2 = 8$ €, avec la probabilité 0,05.

— Gain de 3 € : gain net $3 - 2 = 1$ €, avec la probabilité 0,20.

— Rien : gain net -2 €, avec la probabilité $1 - 0,05 - 0,20 = 0,75$.

$$E(X) = 8 \times 0,05 + 1 \times 0,20 + (-2) \times 0,75$$

— $E(X) = 0,40 + 0,20 - 1,50 = -0,90$ €.

— Le jeu **n'est pas équitable** : le joueur perd en moyenne 0,90 € par billet, et l'organisateur gagne autant.

— Sur 5 000 billets vendus, la recette nette de l'organisateur est d'environ $5\,000 \times 0,90 = 4\,500$ €.

Réponse. $E(X) = -0,90$ € : le jeu est défavorable au joueur.

Correction de l'exercice 5 - Rendre un jeu équitable

Un jeu est équitable lorsque l'espérance du gain net est **nulle**. Notons m le prix du billet.

Étape 1 — espérance du gain brut (avant déduction de la mise).

— $E(\text{gain brut}) = 10 \times 0,05 + 3 \times 0,20 + 0 \times 0,75 = 0,50 + 0,60 = 1,10$ €.

Étape 2 — condition d'équité. Le gain net vaut le gain brut diminué de m , donc son espérance vaut $1,10 - m$.

— On résout $1,10 - m = 0$, d'où $m = 1,10$ €.

- Le billet devrait être vendu 1,10 € pour que le jeu soit équitable.
- Vérification : avec $m = 1,10$, les gains nets sont 8,90 ; 1,90 ; -1,10, et $8,90 \times 0,05 + 1,90 \times 0,20 - 1,10 \times 0,75 = 0,445 + 0,38 - 0,825 = 0$. Cohérent.

Réponse. 1,10 € le billet.

Correction de l'exercice 6 - Deux probabilités inconnues

Notons $a = P(X = 2)$ et $b = P(X = 5)$. Deux conditions permettent de les déterminer.

Condition 1 — somme des probabilités.

- $0,5 + a + b = 1$, donc $a + b = 0,5$, c'est-à-dire $a = 0,5 - b$.

Condition 2 — espérance.

$$E(X) = 0 \times 0,5 + 2a + 5b = 1,6$$

- On remplace a par $0,5 - b$: $2(0,5 - b) + 5b = 1,6$.
- $1 - 2b + 5b = 1,6$, donc $1 + 3b = 1,6$.
- $3b = 0,6$, d'où $b = 0,2$ et $a = 0,5 - 0,2 = 0,3$.
- Vérification : $2 \times 0,3 + 5 \times 0,2 = 0,6 + 1 = 1,6$. Cohérent.

Réponse. $P(X = 2) = 0,3$ et $P(X = 5) = 0,2$.

Correction de l'exercice 7 - Une remise commerciale

a) Notons X la remise obtenue, en euros.

x_i	0	5	20
$P(X = x_i)$	0,60	0,30	0,10

$$E(X) = 0 \times 0,60 + 5 \times 0,30 + 20 \times 0,10 = 1,50 + 2 = 3,50$$

- La remise moyenne est de 3,50 € par client.
- b) Sur N clients, le total attendu vaut $N \times E(X)$.
- $4\,000 \times 3,50 = 14\,000$ €.
 - **Lecture commerciale** : cette opération coûte en moyenne 3,50 € par client. Si la marge moyenne par client est supérieure, l'opération reste rentable.

Réponse. a) 3,50 € · b) 14 000 €.

Correction de l'exercice 8 - Deux composants testés

X peut valoir 0, 1 ou 2. Les composants étant indépendants, on multiplie les probabilités le long de chaque chemin.

- $P(X = 0)$: aucun défectueux, $0,9 \times 0,9 = 0,81$.
- $P(X = 2)$: les deux défectueux, $0,1 \times 0,1 = 0,01$.
- $P(X = 1)$: **deux** chemins (le premier défectueux et pas le second, ou l'inverse), chacun de probabilité $0,1 \times 0,9 = 0,09$, donc $2 \times 0,09 = 0,18$.

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,81	0,18	0,01

- Contrôle : $0,81 + 0,18 + 0,01 = 1$. Cohérent.

$$E(X) = 0 \times 0,81 + 1 \times 0,18 + 2 \times 0,01 = 0,20$$

- On retrouve $E(X) = 2 \times 0,1$: c'est déjà la formule $E(X) = np$ de la loi binomiale, que le chapitre généralisera.
- **Piège** : oublier le facteur 2 pour $P(X = 1)$ donnerait une somme de probabilités inférieure à 1 — d'où l'intérêt du contrôle.

Réponse. 0,81 ; 0,18 ; 0,01 et $E(X) = 0,20$.

Correction de l'exercice 9 - Coût annuel de maintenance

a) - Contrôle : $0,70 + 0,20 + 0,08 + 0,02 = 1$.

$$E(X) = 0 \times 0,70 + 250 \times 0,20 + 900 \times 0,08 + 2\,500 \times 0,02$$

— $250 \times 0,20 = 50$; $900 \times 0,08 = 72$; $2\,500 \times 0,02 = 50$.

— $E(X) = 50 + 72 + 50 = 172$ €.

b) $60 \times 172 = 10\,320$ €.

- **Lecture** : les pannes lourdes (2 500 €) ne touchent que 2 % des machines mais pèsent autant dans le budget que les petites interventions à 250 € qui en touchent 20 %. Un budget de maintenance ne se construit donc pas sur la panne la plus fréquente, mais sur l'espérance.

Réponse. a) 172 € par machine · b) 10 320 €.

Correction de l'exercice 10 - Comparer deux contrats

Contrat A. Le coût est fixe : 200 € par an, quel que soit le nombre de pannes.

Contrat B. Le coût vaut $80 + 150Y$. On calcule d'abord le nombre moyen de pannes.

$$E(Y) = 0 \times 0,6 + 1 \times 0,3 + 2 \times 0,1 = 0,5$$

On applique ensuite la règle $E(aY + b) = a \times E(Y) + b$:

$$E(80 + 150Y) = 80 + 150 \times 0,5 = 80 + 75 = 155$$

- Le contrat B coûte en moyenne 155 € par an, contre 200 € pour le contrat A : **B est plus avantageux**, d'environ 45 € par an.
- **Réserve à signaler** : avec le contrat B, une année à deux pannes coûte $80 + 300 = 380$ €. L'espérance compare les coûts sur le long terme ; elle ne protège pas d'une mauvaise année.

Réponse. Le contrat B : 155 € en moyenne contre 200 €.

Correction de l'exercice 11 - Cadence d'une machine

a) **Espérance.**

$$E(X) = 18 \times 0,20 + 19 \times 0,50 + 20 \times 0,30$$

— $18 \times 0,20 = 3,6$; $19 \times 0,50 = 9,5$; $20 \times 0,30 = 6$.

— $E(X) = 3,6 + 9,5 + 6 = 19,1$ pièces par heure.

b) Sur 7 heures, la production attendue vaut $7 \times E(X)$.

— $7 \times 19,1 = 133,7$, soit environ 134 **pièces**.

— Contrôle de vraisemblance : 19,1 est bien compris entre 18 et 20, et proche de 19 qui est la valeur la plus probable. Cohérent.

Réponse. a) 19,1 pièces/h · b) environ 134 pièces.

Correction de l'exercice 12 - D'un tableau d'effectifs à une loi

Chaque probabilité s'obtient en divisant l'effectif par le total 500.

- $P(X = 0) = \frac{150}{500} = 0,30$.
- $P(X = 1) = \frac{200}{500} = 0,40$.
- $P(X = 2) = \frac{110}{500} = 0,22$.
- $P(X = 3) = \frac{40}{500} = 0,08$.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,30	0,40	0,22	0,08

- Contrôle : $0,30 + 0,40 + 0,22 + 0,08 = 1$.
 $E(X) = 0 \times 0,30 + 1 \times 0,40 + 2 \times 0,22 + 3 \times 0,08 = 1,08$
- Un véhicule de la série porte en moyenne 1,08 option.

Réponse. $E(X) = 1,08$ option par véhicule.

Correction de l'exercice 13 - Du nombre d'options au prix

On applique la règle du cours sur le changement d'échelle :

$$E(aX + b) = a \times E(X) + b$$

- Ici $a = 12$ et $b = 40$:
 $E(M) = 12 \times 1,08 + 40 = 12,96 + 40 = 52,96$
- La marge moyenne est de 52,96 € par véhicule.
- Sur 500 véhicules : $500 \times 52,96 = 26\,480$ €.
- **Gain de méthode** : il n'a pas fallu redresser la loi de M (qui prendrait les valeurs 40, 52, 64, 76). La formule évite tout ce travail.
- Vérification par la loi de M :
 $40 \times 0,30 + 52 \times 0,40 + 64 \times 0,22 + 76 \times 0,08 = 12 + 20,8 + 14,08 + 6,08 = 52,96$.
Cohérent.

Réponse. $E(M) = 52,96$ € et 26 480 € sur 500 véhicules.

Correction de l'exercice 14 - Le calcul d'un assureur

- a) Notons G le gain de l'assureur sur un contrat.
 - Sans sinistre (probabilité 0,97) : $G = 120$ €.
 - Avec sinistre (probabilité 0,03) : $G = 120 - 3\,000 = -2\,880$ €.
 - $E(G) = 120 \times 0,97 + (-2\,880) \times 0,03 = 116,4 - 86,4 = 30$
 - L'assureur gagne en moyenne 30 € par contrat.
- b) La prime d'équilibre m vérifie $m - 3\,000 \times 0,03 = 0$.
 - $m = 90$ €. En dessous de 90 €, l'assureur perd de l'argent en moyenne.
- c) $5\,000 \times 30 = 150\,000$ € de bénéfice attendu.
 - **Lecture** : les 30 € d'écart entre la prime (120 €) et le coût moyen du risque (90 €) financent les frais de gestion et la marge. C'est exactement ainsi qu'une prime d'assurance est construite.

Réponse. a) 30 € · b) 90 € · c) 150 000 €.

Correction de l'exercice 15 - Une loi à deux inconnues et un contrôle

Mise en équations.

- Somme des probabilités : $0,80 + a + b = 1$, donc $a + b = 0,20$.
- Espérance : $0 \times 0,80 + 1 \times a + 2 \times b = 0,25$, donc $a + 2b = 0,25$.

Résolution. On soustraie la première équation de la seconde.

- $(a + 2b) - (a + b) = 0,25 - 0,20$, donc $b = 0,05$.
- Puis $a = 0,20 - 0,05 = 0,15$.
- Vérification : $0,15 + 2 \times 0,05 = 0,25$. Cohérent.

Sur une année. Les douze mois apportent chacun 0,25 panne en moyenne.

- $12 \times 0,25 = 3$ pannes par an en moyenne.
- **Attention** : cette multiplication est licite pour l'espérance (les moyennes s'additionnent), mais elle ne donnerait rien de juste pour une probabilité.

Réponse. $a = 0,15$, $b = 0,05$ et 3 pannes par an en moyenne.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : faut-il prendre la garantie ?

a) - $0,62 + 0,22 + 0,11 + 0,05 = 1$: la somme des probabilités vaut 1, la loi est bien définie.

b) **Espérance.**

$$E(X) = 0 \times 0,62 + 200 \times 0,22 + 800 \times 0,11 + 3\,000 \times 0,05$$

- $200 \times 0,22 = 44$; $800 \times 0,11 = 88$; $3\,000 \times 0,05 = 150$.
- $E(X) = 44 + 88 + 150 = 282$ €.

c) On compare les deux budgets sur 40 machines.

- Sans garantie : $40 \times 282 = 11\,280$ € en moyenne.
- Avec garantie : $40 \times 350 = 14\,000$ €, montant certain.
- L'écart est de $14\,000 - 11\,280 = 2\,720$ € en défaveur de la garantie : **en moyenne, il vaut mieux ne pas la prendre.**

d) La garantie devient intéressante dès que son prix passe sous le coût moyen des réparations.

- Il faudrait la négocier à moins de **282 € par machine.**
- **Argument contraire** : la panne à 3 000 € touche 5 % des machines, soit environ $40 \times 0,05 = 2$ machines par an — mais une mauvaise année peut en concentrer bien davantage. La garantie transforme un coût incertain en coût fixe : elle protège la trésorerie, ce que l'espérance seule ne dit pas.
- **Conclusion à retenir** : l'espérance donne la décision rentable *en moyenne et sur la durée* ; le choix final tient aussi compte du risque que l'entreprise accepte de porter.

Réponse. a) somme = 1 · b) 282 € · c) sans garantie, 11 280 € contre 14 000 € · d) en dessous de 282 € par machine.