

Plaquette 3 – Schéma de Bernoulli et triangle de Pascal : compter les chemins

Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Une probabilité binomiale se lit sur un arbre : chaque chemin à k succès a la même probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$, et le **triangle de Pascal** donne le nombre de ces chemins. Le travail se fait donc en deux temps : **vérifier** qu'on est bien dans un schéma de Bernoulli (trois conditions), puis **compter** les chemins.

Exercice 1 – Reconnaître un schéma de Bernoulli

Pour chacune des situations, dire si le nombre de succès suit une loi binomiale, en justifiant par les trois conditions.

- On prélève 10 pièces **avec remise** dans un lot contenant 5 % de pièces défectueuses ; X compte les défectueuses.
- On prélève 3 boules **sans remise** dans une urne de 10 boules dont 4 rouges ; X compte les rouges.
- On lance 20 fois une pièce équilibrée ; X compte les « pile ».
- On teste des composants jusqu'à en trouver un défectueux ; X compte les tests effectués.

Exercice 2 – Identifier n et p

Une machine produit des pièces dont 8 % sont hors tolérance. On prélève au hasard 12 pièces dans une production très importante et on note X le nombre de pièces hors tolérance.

Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres, puis donner $E(X)$.

Exercice 3 – Compléter le triangle de Pascal

La ligne $n = 6$ du triangle de Pascal est : $1 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1$.

Construire les lignes $n = 7$ puis $n = 8$.

Exercice 4 – Compter les chemins

On répète 5 fois une épreuve de Bernoulli.

- Combien de chemins de l'arbre réalisent exactement 2 succès ?
- Combien en réalisent exactement 3 ?
- Combien de chemins l'arbre compte-t-il en tout ?

Exercice 5 - Probabilité d'un chemin

Une épreuve a une probabilité de succès $p = 0,2$ et on la répète 4 fois.

Calculer la probabilité d'obtenir la suite précise : succès, échec, succès, échec. Que vaut la probabilité de la suite échec, succès, échec, succès ?

Exercice 6 - Une probabilité binomiale

X suit la loi binomiale $B(4; 0,2)$.

Calculer $P(X = 2)$.

Exercice 7 - Deux probabilités avec $n = 5$

X suit la loi binomiale $B(5; 0,3)$.

- Calculer $P(X = 2)$.
- Calculer $P(X = 3)$ (arrondis au dix-millième).

Exercice 8 - La loi complète

X suit la loi binomiale $B(3; 0,25)$.

Dresser la loi de probabilité de X et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

Exercice 9 - Le cas symétrique $p = 0,5$

On lance 6 fois une pièce équilibrée et on note X le nombre de « pile ».

- Calculer $P(X = 3)$.
- Calculer $P(X = 0)$.
- Expliquer pourquoi $P(X = 2) = P(X = 4)$.

Exercice 10 - Aucun succès, tous les succès

Une machine produit 4 % de pièces défectueuses. On prélève 10 pièces au hasard dans une production très importante.

- Calculer la probabilité qu'aucune ne soit défectueuse (arrondi au millième).
- Calculer la probabilité que les dix le soient.

Exercice 11 - La valeur la plus probable

X suit la loi binomiale $B(5; 0,3)$. On donne la loi complète :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,16807	0,36015	0,30870	0,13230	0,02835	0,00243

- Quelle est la valeur la plus probable de X ?
- Calculer $E(X)$ et comparer.

Exercice 12 - Deux prélèvements à comparer

Un lot contient 10 % de pièces défectueuses.

- a) On prélève 4 pièces dans un lot de 5 000 pièces. Peut-on utiliser la loi binomiale ?
- b) On prélève 4 pièces dans un lot de 10 pièces (dont 1 défectueuse). Peut-on l'utiliser ?

Exercice 13 - Un système à quatre modules

Un système comporte 4 modules indépendants. Chaque module tombe en panne au cours du mois avec la probabilité 0,2. On note X le nombre de modules en panne.

- a) Préciser la loi de X .
- b) Calculer $P(X = 1)$ et $P(X = 0)$.
- c) Calculer $E(X)$.

Exercice 14 - Retrouver un paramètre

X suit une loi binomiale $B(n; p)$ avec $n = 20$ et $E(X) = 3$.

- a) Déterminer p .
- b) Calculer $P(X = 0)$ (arrondi au millième).

Exercice 15 - Un contrôle sur six pièces

Une chaîne produit 30 % de pièces de premier choix. On prélève 6 pièces au hasard dans une production importante et on note X le nombre de pièces de premier choix.

- a) Calculer $P(X = 2)$ (arrondi au millième).
- b) Calculer $P(X = 4)$.
- c) Comparer et commenter.

Exercice 16 - Synthèse : un QCM répondu au hasard

Un QCM comporte 8 questions indépendantes. Chaque question propose 4 réponses dont une seule est correcte. Un candidat répond entièrement au hasard et on note X son nombre de bonnes réponses.

- a) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
- b) Calculer $E(X)$.
- c) Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$ (arrondis au millième).
- d) En déduire la probabilité d'obtenir au moins 4 bonnes réponses. Le barème « admis à partir de 4 bonnes réponses » est-il protégé du hasard ?