Plaquette 2 – Variables aléatoires : loi de probabilité et espérance

Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale STI2D

Exercices

Méthode

Avant la loi binomiale, il faut savoir décrire **n'importe quelle** variable aléatoire : dresser son tableau de loi, contrôler que la somme des probabilités vaut 1, puis calculer son **espérance**. L'espérance est la valeur moyenne obtenue sur un très grand nombre de répétitions : c'est elle qui permet de chiffrer un gain moyen, un coût moyen ou de comparer deux contrats.

Exercice 1 – Compléter une loi de probabilité

Une variable aléatoire X prend les valeurs -2, 0, 1 et 3.

x_i	-2	0	1	3
$P(X = x_i)$	0,15	0,25	?	0,20

Déterminer la probabilité manquante, puis calculer $E(X)$.

Exercice 2 – Construire la loi d'un gain

On lance un dé équilibré à six faces. Le joueur gagne 5 € si le 6 sort, 1 € si le 4 ou le 5 sort, et perd 2 € sinon.

Dresser la loi de probabilité du gain X, puis calculer $E(X)$.

Exercice 3 – Espérance d'un nombre de défauts

Le nombre X de défauts relevés sur une pièce suit la loi suivante.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,30	0,40	0,20	0,10

Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 4 – Ce jeu est-il équitable ?

Une tombola coûte 2 € le billet. Un billet rapporte 10 € avec la probabilité 0,05, 3 € avec la probabilité 0,20, et rien sinon.

Calculer l'espérance du **gain net** d'un joueur et conclure.

Exercice 5 – Rendre un jeu équitable

On reprend la tombola précédente (gain de 10 € avec la probabilité 0,05, de 3 € avec la probabilité 0,20, rien sinon).

Quel prix du billet rendrait le jeu équitable ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Deux probabilités inconnues

Une variable aléatoire X prend les valeurs 0, 2 et 5, avec $P(X = 0) = 0{,}5$. On sait de plus que $E(X) = 1{,}6$.

Déterminer $P(X = 2)$ et $P(X = 5)$.

Exercice 7 – Une remise commerciale

À la caisse, un client tire une remise au sort : aucune remise dans 60 % des cas, 5 € dans 30 % des cas, 20 € dans 10 % des cas.

a) Calculer la remise moyenne par client.

b) L'enseigne prévoit 4 000 clients sur l'opération. Quel budget doit-elle provisionner ?

Exercice 8 – Deux composants testés

On prélève deux composants indépendamment. Chacun est défectueux avec la probabilité 0,1. On note X le nombre de composants défectueux parmi les deux.

Dresser la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 9 – Coût annuel de maintenance

Le coût annuel de maintenance X d'une machine, en euros, suit la loi suivante.

x_i	0	250	900	2 500
$P(X = x_i)$	0,70	0,20	0,08	0,02

a) Calculer le coût moyen de maintenance d'une machine.

b) Un atelier possède 60 machines identiques. Quel budget annuel prévoir ?

Exercice 10 – Comparer deux contrats

Un atelier hésite entre deux contrats d'entretien pour une machine.

— **Contrat A** : forfait de 200 € par an, toutes réparations comprises.
— **Contrat B** : abonnement de 80 € par an, plus 150 € à chaque panne.

Le nombre annuel de pannes Y suit la loi : $P(Y = 0) = 0{,}6$, $P(Y = 1) = 0{,}3$, $P(Y = 2) = 0{,}1$.

Quel contrat coûte le moins cher en moyenne ?

Exercice 11 – Cadence d'une machine

Le nombre de pièces produites par heure par une machine suit la loi suivante.

x_i	18	19	20
$P(X = x_i)$	0,20	0,50	0,30

a) Calculer la production moyenne horaire.

b) Quelle production attendre sur une journée de 7 heures ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – D'un tableau d'effectifs à une loi

Sur 500 véhicules d'une série, on a relevé le nombre d'options installées.

Nombre d'options	0	1	2	3
Effectif	150	200	110	40

On choisit un véhicule au hasard et on note X son nombre d'options. Dresser la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 13 – Du nombre d'options au prix

On reprend la série précédente, où $E(X) = 1{,}08$. Chaque option facturée rapporte 12 € de marge, et chaque véhicule dégage une marge de base de 40 €.

La marge totale d'un véhicule est $M = 12X + 40$. Calculer $E(M)$, puis la marge attendue sur 500 véhicules.

Exercice 14 – Le calcul d'un assureur

Un assureur propose un contrat à 120 € par an. Un sinistre survient avec la probabilité 0,03 et lui coûte alors 3 000 €.

a) Calculer le gain moyen de l'assureur par contrat.

b) Quel serait le montant de la prime d'équilibre, c'est-à-dire celle qui annule ce gain moyen ?

c) Quel bénéfice attendre sur 5 000 contrats ?

Exercice 15 – Une loi à deux inconnues et un contrôle

Le nombre X de pannes mensuelles d'un équipement vérifie $P(X = 0) = 0{,}80$, $P(X = 1) = a$, $P(X = 2) = b$ et $P(X \geq 3) = 0$. On sait que l'équipement subit en moyenne 0,25 panne par mois.

Déterminer a et b, puis le nombre moyen de pannes sur une année.

Exercice 16 – Synthèse : faut-il prendre la garantie ?

Une entreprise achète 40 machines. Le vendeur propose une **garantie étendue** à 350 € par machine et par an, couvrant toutes les réparations. Sans garantie, le coût annuel de réparation X d'une machine suit la loi suivante.

x_i	0	200	800	3 000
$P(X = x_i)$	0,62	0,22	0,11	0,05

a) Vérifier que cette loi est bien définie.

b) Calculer le coût moyen de réparation d'une machine.

c) Comparer les deux solutions sur le parc de 40 machines.

d) À partir de quel prix la garantie deviendrait-elle intéressante ? Quel argument pourrait malgré tout justifier de la prendre ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).