

MATHÉMATIQUES

Variables aléatoires et loi binomiale

Terminale STI2D

Variable aléatoire • Espérance • Schéma de Bernoulli • Coefficient binomial
Triangle de Pascal • Loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ • $E(X) = np$ • « Au moins un »

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe terminale** (arrêté du 26 février 2026, applicable à la rentrée 2027), partie « Statistique et probabilités », section « Variables aléatoires discrètes finies ». Il couvre :

- espérance d'une variable aléatoire discrète, interprétation ;
- schéma de Bernoulli ; coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ comme nombres de chemins ; triangle de Pascal pour $n \leq 10$, formule de Pascal ;
- loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$: $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = n)$, $P(X = n - 1)$, $P(X = k)$; espérance np (admise) ;
- **algorithmes** : triangle de Pascal, diagramme en bâtons, calcul d'une espérance.

Objectif : calculer et interpréter une espérance, reconnaître une loi binomiale, calculer des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal et des probabilités $P(X = k)$.

Table des matières

1	Espérance d'une variable aléatoire	3
2	Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux	3
3	Loi binomiale	4
4	Algorithmes	5
5	Erreurs classiques	6
6	Fiche de synthèse	6
7	Exercices d'application	6
8	Corrigés des exercices	6

1. Espérance d'une variable aléatoire

Espérance

Si X prend les valeurs $x_1, \dots, x_k$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_k$:

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_kp_k$$

C'est la valeur moyenne de X sur un grand nombre de répétitions.

Maintenance

Le nombre X d'interventions par jour sur une machine vaut 0, 1, 2 avec les probabilités 0,6 ; 0,3 ; 0,1. $E(X) = 0 + 0,3 + 0,2 = 0,5$: en moyenne une intervention tous les deux jours.

2. Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

Schéma de Bernoulli

Répéter n fois, de façon **identique et indépendante**, une épreuve de Bernoulli (succès de probabilité p) constitue un **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p . On le représente par un arbre à 2^n chemins.

Coefficient binomial

Le nombre de chemins de l'arbre comportant exactement k succès est noté $\binom{n}{k}$ (« k parmi n »).

Valeurs immédiates et formule de Pascal

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$; $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, et pour $1 \leq k \leq n-1$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Démonstration. Un chemin à k succès sur n épreuves commence soit par un succès, suivi de $k-1$ succès sur les $n-1$ épreuves restantes ($\binom{n-1}{k-1}$ chemins), soit par un échec, suivi de k succès sur $n-1$ épreuves ($\binom{n-1}{k}$ chemins).

Triangle de Pascal

Chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus de lui (à gauche et juste au-dessus) :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On le prolonge ligne par ligne jusqu'à $n = 10$; par exemple $\binom{10}{3} = 120$.

3. Loi binomiale**Loi binomiale**

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , la variable X qui compte le nombre de succès suit la **loi binomiale** $\mathcal{B}(n; p)$. Pour $k = 0, 1, \dots, n$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(nombre de chemins à k succès $\times$ probabilité d'un tel chemin).

Cas particuliers

$$P(X = 0) = (1-p)^n ; P(X = n) = p^n ; P(X = 1) = np(1-p)^{n-1} ; P(X = n-1) = np^{n-1}(1-p) ; P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n.$$

Espérance (admise)

Si X suit $\mathcal{B}(n; p)$, alors $E(X) = np$.

Contrôle qualité

5 % des pièces d'une production sont défectueuses. On prélève 8 pièces (production assez grande pour assimiler le prélèvement à des tirages avec remise). Le nombre X de pièces défectueuses suit $\mathcal{B}(8; 0,05)$.

- Aucune défectueuse : $P(X = 0) = 0,95^8 \approx 0,663$.
- Au moins une : $P(X \geq 1) = 1 - 0,95^8 \approx 0,337$.
- Au plus une : $P(X \leq 1) = 0,95^8 + 8 \times 0,05 \times 0,95^7 \approx 0,943$.
- En moyenne : $E(X) = 8 \times 0,05 = 0,4$ pièce défectueuse par prélèvement.

$\mathcal{B}(10; 0,3)$

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^7 = 120 \times 0,027 \times 0,7^7 \approx 0,267; E(X) = 3.$$

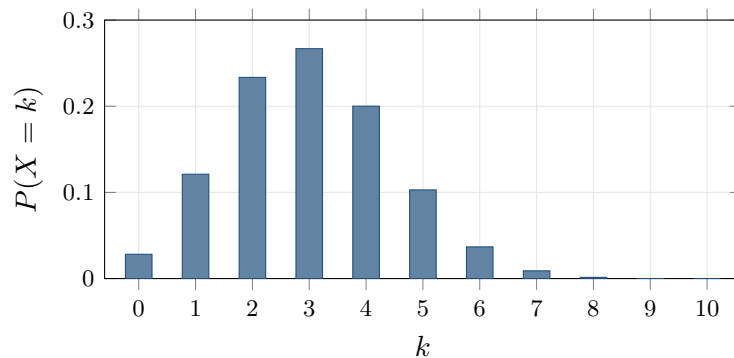


Diagramme en bâtons de la loi $\mathcal{B}(10; 0,3)$: les valeurs les plus probables entourent l'espérance $np = 3$.

4. Algorithmes

Triangle de Pascal

```
def pascal(n):
    ligne = [1]
    for i in range(n):
        nouvelle = [1]
        for k in range(1, len(ligne)):
            nouvelle.append(ligne[k - 1] + ligne[k])
        nouvelle.append(1)
        ligne = nouvelle
    return ligne

print(pascal(10))    # [1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1]
```

Loi et espérance

```
def loi_binomiale(n, p):
    c = pascal(n)
    return [c[k] * p**k * (1 - p)**(n - k) for k in range(n + 1)]

def esperance(valeurs, probas):
    e = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        e = e + valeurs[i] * probas[i]
    return e

L = loi_binomiale(10, 0.3)
print(esperance(list(range(11)), L))    # 3.0 (aux arrondis près)
```

5. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier le coefficient binomial : $p^k(1-p)^{n-k}$ n'est la probabilité que d'un seul chemin.
- Utiliser la loi binomiale pour des tirages sans remise dans un petit lot (épreuves non indépendantes).
- Calculer « au moins un » terme à terme au lieu de passer par $1 - P(X = 0)$.
- Confondre $P(X \leq 1)$ et $P(X < 1) = P(X = 0)$.

6. Fiche de synthèse

Espérance	$E(X) = \sum x_i p_i$
Coefficient binomial	$\binom{n}{k}$: nombre de chemins à k succès ; $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
Loi binomiale	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Cas utiles	$P(X = 0) = (1-p)^n$; $P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$
Espérance binomiale	$E(X) = np$

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Triangle de Pascal

Compléter les lignes $n = 7$ et $n = 8$ du triangle de Pascal. En déduire $\binom{8}{2}$ et $\binom{8}{5}$.

Exercice 2 – QCM

Un QCM comporte 4 questions ; chacune propose 4 réponses dont une seule juste. Un élève répond au hasard. Quelle est la loi du nombre X de bonnes réponses ? Calculer $P(X = 2)$, $P(X \geq 1)$ et $E(X)$.

Exercice 3 – Lampes

Une lampe tombe en panne avant 1 000 heures avec la probabilité 0,1, indépendamment des autres. Un luminaire comporte 6 lampes. Calculer la probabilité qu'aucune ne tombe en panne avant 1 000 heures, puis qu'exactement une tombe en panne.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $n = 7$: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. $n = 8$: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1. Donc $\binom{8}{2} = 28$ et $\binom{8}{5} = 56$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. X suit $\mathcal{B}(4; 0,25)$. $P(X = 2) = 6 \times 0,25^2 \times 0,75^2 \approx 0,211$; $P(X \geq 1) = 1 - 0,75^4 \approx 0,684$; $E(X) = 4 \times 0,25 = 1$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. X suit $\mathcal{B}(6; 0,1)$. $P(X = 0) = 0,9^6 \approx 0,531$; $P(X = 1) = 6 \times 0,1 \times 0,9^5 \approx 0,354$.