

Plaquette 3 - Exponentielle complexe : produits, puissances, formules d'Euler

Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Règles de calcul de la forme exponentielle ($r, r' > 0$, n entier).

$$r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta + \theta')} \quad \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')} \quad (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

- Conjugué et inverse : $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$; $\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$.
- **Géométrie** : multiplier par $r e^{i\alpha}$ fait tourner d'un angle α autour de O et multiplie les distances à O par r .
- Angle orienté : l'angle de $\overrightarrow{OA}$ à $\overrightarrow{OB}$ vaut $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$.
- **Formules d'Euler** :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- Formules d'addition : $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.
- **Méthode « deux écritures »** : calculer un même complexe sous forme algébrique **et** exponentielle, puis identifier les parties réelles et imaginaires, donne des valeurs exactes de cosinus.

Correction de l'exercice 1 - Un produit lu sur la figure

a) On multiplie les modules et on **ajoute** les arguments :

$$z_1 z_2 = 2 \times 3 e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)} = 6 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

- Forme algébrique : $6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = 6i$. Le point P est sur l'axe des imaginaires, à la distance 6 de O .

b) Multiplier z_2 par $z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$ revient à :

- **tourner** M_2 de $\frac{\pi}{6}$ autour de O (l'argument passe de $\frac{\pi}{3}$ à $\frac{\pi}{2}$) ;
- **doubler** sa distance à O (de 3 à 6).
- Sous forme algébrique, le même produit demanderait de développer $(\sqrt{3} + i)\left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$: beaucoup plus long.

Réponse. a) $z_1 z_2 = 6 e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$ · b) rotation de $\frac{\pi}{6}$ et distance multipliée par 2.

Correction de l'exercice 2 - Deux quotients

On divise les modules et on **soustrait** les arguments :

$$\frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$$

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2} e^{i(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4})} = 3 e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i.$
- $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{6} e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})} = \frac{1}{3} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{3}.$
- **Contrôle** : les deux quotients sont inverses l'un de l'autre, et en effet $3i \times \left(-\frac{i}{3}\right) = -i^2 = 1.$
- L'ordre de la soustraction des arguments compte : il suit l'ordre du quotient.

Réponse. $\frac{z_1}{z_2} = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$; $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{3}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{3}.$

Correction de l'exercice 3 - Deux écritures, un cosinus exact

a) $(1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3} + i + i\sqrt{3} + i^2 = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1).$

b) $z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc

$$z_1 z_2 = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

c) La partie réelle de $2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$ est $2\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12}$. On l'identifie avec celle de a) :

— $2\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{12} = \sqrt{3} - 1$, donc $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

— Valeur approchée : $\approx 0,2588$, ce que confirme la calculatrice ($\frac{5\pi}{12}$ rad = 75°).

Réponse. a) $(\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$ · b) $2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$ · c) $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0,2588.$

Correction de l'exercice 4 - Les puissances de $1+i$

a) $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$, donc $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

b) On applique la formule :

— $n = 2 : 2 e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$;

— $n = 4 : 4 e^{i\pi} = -4$;

— $n = 8 : 16 e^{2i\pi} = 16.$

— Contrôle de $n = 2 : (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i.$

c) Passer de P_n à P_{n+1} , c'est multiplier par $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$: une **rotation** de $\frac{\pi}{4}$ autour de O et une distance à O multipliée par $\sqrt{2} \approx 1,41$. D'où la spirale qui s'éloigne de l'origine.

Réponse. a) $(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$ · b) $2i$; -4 ; 16 · c) rotation de $\frac{\pi}{4}$ et distance multipliée par $\sqrt{2}.$

Correction de l'exercice 5 - Des puissances élevées sans développer

Développer ces puissances serait très long ; sous forme exponentielle, c'est une seule multiplication d'argument.

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

a) $1+i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$, donc

— $(1+i\sqrt{3})^6 = 2^6 e^{i\frac{6\pi}{3}} = 64 e^{2i\pi} = 64.$

b) $-1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$, donc

- $(-1 + i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} e^{i\frac{30\pi}{4}} = 32 e^{i\frac{15\pi}{2}}$.
- $\frac{15\pi}{2} = 8\pi - \frac{\pi}{2}$: on retire quatre tours, il reste $-\frac{\pi}{2}$.
- $(-1 + i)^{10} = 32 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -32i$.
- **Rappel** : $(\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32$.

Réponse. a) 64 · b) $-32i$.

Correction de l'exercice 6 - Conjugué et quotient par le conjugué

a) Avec $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ et $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$:

- $\bar{z} = 4 e^{i\frac{\pi}{3}}$;
 - $\frac{1}{z} = \frac{1}{4} e^{i\frac{\pi}{3}}$;
 - $z\bar{z} = 16 e^{i0} = 16$: on retrouve $z\bar{z} = |z|^2$, un réel positif.
- $$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{4}{4} e^{i(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3})} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

b) N est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels, sur le cercle de rayon 4.

- Q est sur le cercle de rayon 1 (module 1), à l'angle $-\frac{2\pi}{3}$: dans le troisième quadrant, comme sur la figure.
- En forme algébrique : $\frac{z}{\bar{z}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Réponse. a) $4e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}$; 16 ; $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Correction de l'exercice 7 - Un quotient et un second cosinus

a) $1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$:

$$Z = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

- Attention au signe : on soustrait l'argument $-\frac{\pi}{4}$, ce qui revient à **ajouter** $\frac{\pi}{4}$.

b) On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $1 + i$:

$$Z = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

c) On identifie les parties réelles : $\sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$.

- $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \approx -0,2588$.
- Cohérent : $\frac{7\pi}{12} = 105^\circ$ dépasse 90° , son cosinus est négatif.

Réponse. a) $\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$ · b) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ · c) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Correction de l'exercice 8 - Quand une puissance est-elle réelle ?

On écrit la puissance, puis on traduit la condition sur l'argument.

$$z^n = e^{i\frac{n\pi}{5}}$$

a) z^n est réel si son point image est sur l'axe des réels, c'est-à-dire si son argument est un

multiple de π :

— $\frac{n\pi}{5} = k\pi \Leftrightarrow n = 5k$: n doit être un **multiple de 5**.

— Le plus petit est $n = 5$: $z^5 = e^{i\pi} = -1$. (Pour $n = 10$, $z^{10} = 1$.)

b) z^n est imaginaire pur si son argument vaut $\frac{\pi}{2} + k\pi$:

— $\frac{n\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n = \frac{5}{2} + 5k = \frac{5(2k+1)}{2}$.

— $5(2k+1)$ est impair, donc jamais divisible par 2 : aucun entier n ne convient. z^n n'est **jamais** imaginaire pur.

Réponse. a) n multiple de 5 ; $z^5 = -1$ · b) non.

Correction de l'exercice 9 - Les formules d'Euler

a) On additionne puis on soustrait les deux égalités :

— somme : $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$;

— différence : $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$.

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

b) On élève la première au carré, avec $e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^0 = 1$:

— $\cos^2 \theta = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{2 + 2 \cos(2\theta)}{4} = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.

— On a reconnu $e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = 2 \cos(2\theta)$ (formule d'Euler pour l'angle 2θ).

c) $\cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$ et $\frac{1 + \cos \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$. Égalité vérifiée.

— **Usage** : cette formule sert à calculer la puissance moyenne d'un signal sinusoïdal.

Réponse. b) $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ · c) $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 10 - Retrouver les formules d'addition

a) Le membre de gauche vaut $\cos(a+b) + i \sin(a+b)$. Celui de droite se développe :

— $(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b)$.

— On identifie parties réelles et parties imaginaires :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

b) Avec $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = -\frac{\pi}{4}$ ($\cos b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$) :

— $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0,9659$.

— **Intérêt** : on n'a plus besoin de mémoriser les formules d'addition, la règle $e^{ia} e^{ib} = e^{i(a+b)}$ les contient toutes.

Réponse. b) $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0,9659$.

Correction de l'exercice 11 - Tourner et agrandir un triangle

a) $w = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$. Multiplier par w , c'est :

— tourner de $\frac{\pi}{4}$ autour de O ;

— multiplier les distances à O par $\sqrt{2}$.

b) Calcul algébrique :

- $z_A = 2(1 + i) = 2 + 2i$;
- $z_B = (2 + i)(1 + i) = 2 + 2i + i - 1 = 1 + 3i$;
- $z_C = (1 + i)^2 = 2i$.

c) $AB = |z_B - z_A| = |i| = 1$ et $A'B' = |-1 + i| = \sqrt{2}$.

$$A'B' = |w| \times AB$$

- Toutes les longueurs sont multipliées par $\sqrt{2}$ et les angles conservés : $A'B'C'$ est un agrandissement **tourné** de ABC .

Réponse. a) rotation de $\frac{\pi}{4}$ et agrandissement de rapport $\sqrt{2}$ · b) $2 + 2i$; $1 + 3i$; $2i$ · c) $AB = 1$, $A'B' = \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 12 - Mesurer un angle par un quotient

a) $|z_A| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\arg z_A = \frac{\pi}{4}$: $z_A = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

— $|z_B| = \sqrt{1 + 3} = 2$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $z_B = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) On divise :

$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2}{2\sqrt{2}} e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

c) L'angle de $\overrightarrow{OA}$ à $\overrightarrow{OB}$ est l'argument du quotient : $\frac{5\pi}{12}$ rad, soit $\frac{5 \times 180}{12} = 75^\circ$.

— Le rapport des distances est le module : $\frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$.

— **Méthode à retenir** : un quotient d'affixes donne à la fois un **angle** et un **rapport de longueurs**.

Réponse. a) $2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$ · b) $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{5\pi}{12}}$ · c) 75° ; rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver $\cos 3\theta$

a) Par la règle des puissances :

$$(e^{i\theta})^3 = e^{3i\theta}$$

— Le membre de gauche est $e^{3i\theta}$ et celui de droite $(e^{i\theta})^3$.

b) On note $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$, et on développe avec $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:

— $(c + is)^3 = c^3 + 3ic^2s + 3c(is)^2 + (is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3$.

— Partie réelle : $c^3 - 3cs^2$. Avec $s^2 = 1 - c^2$: $c^3 - 3c + 3c^3 = 4c^3 - 3c$.

— Donc $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

c) $\theta = \frac{\pi}{3}$: $\cos \pi = -1$ et $4 \times \frac{1}{8} - 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$. Égalité vérifiée.

Réponse. b) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ · c) $-1 = -1$.

Correction de l'exercice 14 - Le bras d'un robot

a) On calcule chaque terme sous forme algébrique :

$$re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

- $3e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$;
- $2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3}$;
- $z = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right) + i\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) \approx 1,60 + 3,23i$.

b) La distance est $|z| \approx \sqrt{1,598^2 + 3,232^2} \approx 3,61$ dm.

- **Sans calcul** : le second segment est perpendiculaire au premier ($\theta_2 = \frac{\pi}{2}$), donc le triangle OJP est rectangle en J et $OP = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3,61$ dm.
- La forme exponentielle traduit directement les angles des articulations : c'est ainsi que l'on programme les robots.

Réponse. a) $z \approx 1,60 + 3,23i$ · b) $\sqrt{13} \approx 3,61$ dm.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un quotient remarquable

a) $|z_1| = \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{1}{2}$: $z_1 = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

— $z_2 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$$Z = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{i(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = 2 e^{i\frac{\pi}{12}}$$

b) On multiplie par le conjugué $1+i$:

$$— Z = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$— Z = 2 \cos \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12}, \text{ donc } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

c) $Z^{12} = 2^{12} e^{i\pi} = -4\,096$.

— Le calcul algébrique de Z^{12} aurait demandé onze multiplications ; la forme exponentielle en demande une.

Réponse. a) $Z = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ · b) $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ · c) $-4\,096$.