

Plaquette 5 - Filtres : fonction de transfert, gain et déphasage

Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fonction de transfert d'un filtre (entrée e , sortie s , même pulsation ω).

— $\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$. Si $\underline{H} = G e^{i\varphi}$, alors pour $e(t) = E \cos(\omega t)$:

$$s(t) = G E \cos(\omega t + \varphi)$$

— **Passe-bas** du premier ordre : $\underline{H} = \frac{1}{1 + ix}$, avec $x = \frac{f}{f_c}$ et, pour un circuit RC ,
 $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$.

— **Passe-haut** du premier ordre : $\underline{H} = \frac{ix}{1 + ix}$.

— Module d'un quotient : $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$; argument : $\arg a - \arg b$. Ainsi $\left| \frac{1}{1 + ix} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

— **Gain en décibels** : $G_{dB} = 20 \log G$. Une atténuation de moitié vaut environ -6 dB ;
 $G = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vaut environ -3 dB.

— Filtres en cascade (sans interaction) : $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$; les gains se multiplient, les phases s'additionnent.

— Déphasage et retard : $\Delta t = \frac{|\varphi|}{\omega}$.

— Les arguments non remarquables se calculent à la calculatrice (fonction « arg » ou conversion en forme exponentielle).

Correction de l'exercice 1 - Le passe-bas à la fréquence de coupure

a) On multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

— Module : $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; argument : $-\frac{\pi}{4}$.

— $\underline{H} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) Gain $G = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ et déphasage $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (-45°).

— Autre calcul, plus rapide : $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc son inverse est $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

— Sur la figure, H_1 est à la distance $0,707$ de O , sous l'axe des réels à 45° : la sortie est **en retard** sur l'entrée.

Réponse. a) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ · b) gain $\approx 0,707$, déphasage $-\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 2 - Gain et phase à plusieurs fréquences

a) Le module d'un quotient est le quotient des modules :

$$G(x) = \frac{|1|}{|1 + ix|} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

— L'argument est $\arg 1 - \arg(1 + ix) = -\arg(1 + ix)$.

b) Valeurs obtenues :

- $x = 0,5 : G \approx 0,894, \varphi \approx -0,46 \text{ rad}$;
- $x = 1 : G \approx 0,707, \varphi \approx -0,79 \text{ rad } (-\frac{\pi}{4})$;
- $x = 2 : G \approx 0,447, \varphi \approx -1,11 \text{ rad}$;
- $x = 10 : G \approx 0,099, \varphi \approx -1,47 \text{ rad}$.

c) Le gain **diminue** : les hautes fréquences sont atténuées, c'est le rôle d'un passe-bas.

— La phase passe de 0 à presque $-\frac{\pi}{2}$: le retard de la sortie grandit.

— À $x = 10$, il ne reste qu'environ 10 % de l'amplitude d'entrée.

Réponse. b) 0,894 ; 0,707 ; 0,447 ; 0,099 — phases $-0,46$; $-0,79$; $-1,11$; $-1,47$ · c) gain décroissant, phase vers $-\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 3 - Un demi-cercle dans le plan complexe

a) On multiplie par le conjugué $1 - ix$:

$$\underline{H}(x) = \frac{1 - ix}{1 + x^2}$$

— $\underline{H}(0) = 1$; $\underline{H}(1) = 0,5 - 0,5i$; $\underline{H}(2) = 0,2 - 0,4i$; $\underline{H}(10) = \frac{1 - 10i}{101} \approx 0,010 - 0,099i$.

b) On réduit au même dénominateur :

$$\underline{H} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (1 + ix)}{2(1 + ix)} = \frac{1 - ix}{2(1 + ix)}.$$

— $1 - ix$ et $1 + ix$ sont conjugués, donc de même module : $\left| \underline{H} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

c) Tous les points $\underline{H}(x)$ sont à la distance $\frac{1}{2}$ du point d'affixe $\frac{1}{2}$: ils sont sur le **cercle** de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

— Comme la partie imaginaire $-\frac{x}{1 + x^2}$ est négative, c'est le **demi-cercle inférieur**, parcouru de 1 vers 0 quand la fréquence augmente.

Réponse. a) 1 ; $0,5 - 0,5i$; $0,2 - 0,4i$; $\approx 0,010 - 0,099i$ · c) demi-cercle inférieur de centre $\frac{1}{2}$, rayon $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4 - Le diagramme de Bode du gain

a) Avec $G = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$:

— $x = 1 : 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -10 \log 2 \approx -3,0 \text{ dB}$;

— $x = 10 : 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{101}}\right) \approx -20,0 \text{ dB}$;

— $x = 100 : \approx -40,0 \text{ dB}$.

b) Pour x grand, $1 + x^2 \approx x^2$, donc $\sqrt{1 + x^2} \approx x$ et $G \approx \frac{1}{x}$.

$$G_{\text{dB}} \approx 20 \log\left(\frac{1}{x}\right) = -20 \log x$$

- c) Quand x est multiplié par 10, $\log x$ augmente de 1 : le gain perd **20 dB par décade**.
 — C'est la droite pointillée descendante ; l'autre asymptote, $G_{dB} = 0$, décrit les basses fréquences qui passent sans atténuation. Les deux droites se coupent à la fréquence de coupure, où la courbe réelle est 3 dB en dessous.

Réponse. a) $-3,0$; $-20,0$; $-40,0$ dB · c) -20 dB par décade.

Correction de l'exercice 5 - Passe-bas et passe-haut

a) $\underline{H}_h(1) = \frac{i}{1+i}$. Avec $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$:

$$\underline{H}_h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

— B est le symétrique de A par rapport à l'axe des réels : même gain, déphasage opposé (**avance** de 45°).

b) $\underline{H}_b + \underline{H}_h = \frac{1+ix}{1+ix} = 1$. Sur la figure, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ aboutit bien au point 1.

c) x très petit : $\underline{H}_h \approx ix$, proche de 0 (les basses fréquences sont bloquées).

— x très grand : $\underline{H}_h = \frac{1}{1 + \frac{1}{ix}} \approx 1$ (les hautes fréquences passent).

— C'est exactement le comportement inverse du passe-bas.

Réponse. a) $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ · b) $\underline{H}_b + \underline{H}_h = 1$ · c) ≈ 0 puis ≈ 1 .

Correction de l'exercice 6 - Dimensionner un filtre RC

a) $RC = 10^3 \times 10^{-7} = 10^{-4}$ s.

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-4}} \approx 1\,591,5 \text{ Hz}$$

b) On calcule $x = \frac{f}{f_c}$, puis $G = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$:

— $f = 50$ Hz : $x \approx 0,031\,4$ et $G \approx 1,000$ (exactement 0,999 5).

— $f = 10$ kHz : $x \approx 6,283$ et $G \approx \frac{1}{\sqrt{40,48}} \approx 0,157$.

c) Le signal à 50 Hz passe intact ; celui à 10 kHz est réduit à environ 16 % de son amplitude.

— Ce filtre sert à éliminer un **bruit haute fréquence** superposé à un signal lent, par exemple sur un capteur.

Réponse. a) $f_c \approx 1\,591,5$ Hz · b) $\approx 1,000$ et $\approx 0,157$.

Correction de l'exercice 7 - Le retard de la sortie

a) À la coupure, $\underline{H} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$: déphasage $-\frac{\pi}{4}$, la sortie est en retard.

b) Le retard est le déphasage divisé par la pulsation :

$$\Delta t = \frac{|\varphi|}{\omega} = \frac{\pi/4}{2\pi f_c} = \frac{1}{8f_c}$$

— $\Delta t = \frac{1}{8 \times 1\,591,5} \approx 7,85 \times 10^{-5}$ s, soit environ 78,5 μ s.

- La période est $T = \frac{1}{f_c}$: le retard vaut $\frac{T}{8}$, un huitième de période, ce qui correspond bien à $\frac{45^\circ}{360^\circ}$.

Réponse. a) $-\frac{\pi}{4}$ · b) $\Delta t = \frac{1}{8f_c} \approx 78,5 \mu\text{s}$, soit $\frac{T}{8}$.

Correction de l'exercice 8 - Un filtre passe-bande

a) On calcule $2\left(x - \frac{1}{x}\right)$, puis l'inverse.

- $x = 1$: $x - \frac{1}{x} = 0$, donc $\underline{H} = 1$.
 — $x = 2$: $2(2 - 0,5) = 3$, donc $\underline{H} = \frac{1}{1 + 3i} = \frac{1 - 3i}{10} = 0,1 - 0,3i$.
 — $x = 0,5$: $2(0,5 - 2) = -3$, donc $\underline{H} = \frac{1}{1 - 3i} = 0,1 + 0,3i$.

b) $G(1) = 1$ et $G(2) = G(0,5) = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0,316$.

$$\left| \frac{1}{1 \pm 3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 9}}$$

- Le gain est maximal à $x = 1$ (la **résonance**) et prend la même valeur pour une fréquence double ou moitié.
 c) P_2 et $P_{0,5}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels : même gain, déphasages opposés (retard au-dessus de la résonance, avance en dessous). Tous les points sont sur le cercle de centre $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Réponse. a) $1 ; 0,1 - 0,3i ; 0,1 + 0,3i$ · b) $1 ; \approx 0,316 ; \approx 0,316$.

Correction de l'exercice 9 - Largeur de la bande passante

a) $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$. On veut ce gain égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{2}$$

b) Pour $x_2 = \frac{\sqrt{17} + 1}{4}$: $\frac{1}{x_2} = \frac{4}{\sqrt{17} + 1} = \frac{4(\sqrt{17} - 1)}{17 - 1} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}$.

- Donc $x_2 - \frac{1}{x_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Il convient.
 — De même $\frac{1}{x_1} = x_2$, donc $x_1 - \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{2}$: il convient aussi.
 — $x_1 \approx 0,781$ et $x_2 \approx 1,281$.

c) $x_2 - x_1 = \frac{2}{4} = 0,5$.

- C'est l'inverse du coefficient 2 de l'énoncé (le **facteur de qualité**) : plus ce facteur est grand, plus le filtre est sélectif.

Réponse. b) $x_1 \approx 0,781$, $x_2 \approx 1,281$ · c) largeur 0,5.

Correction de l'exercice 10 - Deux filtres en cascade

a) Pour $x = 1$: $\frac{1}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On élève au carré :

$$\underline{H} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{2}$$

- Les gains se multiplient ($0,707 \times 0,707 \approx 0,5$) et les déphasages s'additionnent ($-45^\circ - 45^\circ = -90^\circ$).
- b) $G_{dB} = 20 \log 0,5 \approx -6,0$ dB, contre $-3,0$ dB pour un seul filtre.
- En décibels, les gains **s'ajoutent** : c'est tout l'intérêt de cette unité. Aux hautes fréquences, la pente devient -40 dB par décade : le filtre double est deux fois plus sélectif.

Réponse. a) $\frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -\frac{i}{2}$ · b) $\approx -6,0$ dB contre $-3,0$ dB.

Correction de l'exercice 11 - Du signal d'entrée au signal de sortie

a) La fréquence est la fréquence de coupure : $x = 1$ et $\underline{H} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) $\underline{E} = 5$, donc :

$$\underline{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \times 5 = \frac{5\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

— $\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54$.

— $s(t) = 3,54 \cos\left(2\pi \times 1\,000 t - \frac{\pi}{4}\right)$.

— **Méthode** : multiplier par $\underline{H}$ en forme exponentielle, c'est multiplier l'amplitude par le gain et **ajouter** le déphasage à la phase.

Réponse. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ · b) $s(t) \approx 3,54 \cos\left(2000\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$.

Correction de l'exercice 12 - Filtrer un bruit

a) Avec $G(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$:

— $x = 0,1$: $G = \frac{1}{\sqrt{1,01}} \approx 0,995$;

— $x = 10$: $G = \frac{1}{\sqrt{101}} \approx 0,100$.

b) On multiplie chaque amplitude par son gain :

$$S = G \times E$$

— Signal utile : $2 \times 0,995 \approx 1,99$ V.

— Bruit : $2 \times 0,0995 \approx 0,20$ V.

— Le rapport signal sur bruit passe de 1 à environ 10 : le filtre a nettoyé le signal.

c) Pour $x = 0,1$, $\arg \underline{H} = -\arg(1 + 0,1i) \approx -0,10$ rad : un retard minime, d'environ 1,6 % de la période. En pratique il est négligeable.

Réponse. a) $\approx 0,995$ et $\approx 0,100$ · b) $\approx 1,99$ V et $\approx 0,20$ V · c) déphasage $\approx -0,10$ rad, négligeable.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver une résistance

a) On résout $G(x) = 0,5$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} = 2 \Rightarrow 1+x^2 = 4$$

— $x^2 = 3$, et $x > 0$, donc $x = \sqrt{3}$.

b) $x = \frac{f}{f_c}$ donne $f_c = \frac{2\,000}{\sqrt{3}} \approx 1\,154,7$ Hz.

— De $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$, on tire $R = \frac{1}{2\pi C f_c} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-7} \times 1\,154,7} \approx 1\,378 \, \Omega$.

— **Contrôle** : avec cette résistance, $f_c \approx 1\,155$ Hz et, à 2 000 Hz, $x \approx 1,73$: le gain vaut bien $\frac{1}{\sqrt{4}} = 0,5$.

Réponse. a) $x = \sqrt{3}$ · b) $f_c \approx 1\,154,7$ Hz, $R \approx 1\,378 \, \Omega$.

Correction de l'exercice 14 - Imposer un déphasage

a) L'argument d'un quotient est la différence des arguments :

$$\arg \underline{H} = \arg 1 - \arg (1 + ix) = -\arg (1 + ix)$$

— Un retard de $\frac{\pi}{3}$ signifie $\arg \underline{H} = -\frac{\pi}{3}$, donc $\arg (1 + ix) = \frac{\pi}{3}$.

b) On identifie parties réelles et imaginaires :

— $r \cos \frac{\pi}{3} = 1$, soit $\frac{r}{2} = 1$ et $r = 2$;

— $r \sin \frac{\pi}{3} = x$, soit $x = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

c) $f = \sqrt{3} f_c \approx 1,732 \times 1\,591,5 \approx 2\,756,6$ Hz.

— Gain : $G = \frac{1}{|1 + ix|} = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$: la sortie a la moitié de l'amplitude d'entrée, soit -6 dB.

Réponse. b) $x = \sqrt{3}$ · c) $f \approx 2\,756,6$ Hz, gain $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le filtre d'une enceinte

a) $x = 0,25$.

— $G_b = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,0625}} \approx 0,970$;

— $G_h = \frac{0,25}{\sqrt{1,0625}} \approx 0,243$.

— Le son de 500 Hz part surtout vers le **boomer**.

b) $x = 1$:

$$\underline{H}_b = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \underline{H}_h = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

— Même gain 0,707, et un déphasage entre les voies de $\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$: les deux haut-parleurs sont **en quadrature**.

c) $\underline{H}_b + \underline{H}_h = \frac{1 + ix}{1 + ix} = 1$, donc $\underline{S}_b + \underline{S}_h = \underline{E}$ pour toute fréquence.

— À 2 000 Hz, chaque voie n'a que 70,7 % de l'amplitude, mais les deux vecteurs perpendiculaires se recomposent en un vecteur de longueur 1 : $0,707^2 + 0,707^2 \approx 1$. Le son est restitué sans trou à la fréquence de raccordement.

Réponse. a) $\approx 0,970$ et $\approx 0,243$: le boomer · b) $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\mp i\frac{\pi}{4}}$, déphasage $\frac{\pi}{2}$ · c) $\underline{H}_b + \underline{H}_h = 1$.