

Plaquette 2 - Forme exponentielle et plan complexe : lire, placer, tourner

Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Forme exponentielle et géométrie.

— Tout complexe non nul s'écrit $z = r e^{i\theta}$, avec $r = |z| > 0$ et $\theta = \arg z$ (à 2π près) :

$$r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

— **Algébrique vers exponentielle** : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis θ tel que $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$ (on vérifie le quadrant sur une figure).

— **Égalité** : $r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'}$ (avec $r, r' > 0$) si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

— **Géométrie** : le point M d'affixe $r e^{i\theta}$ est à la distance r de O , et θ est l'angle orienté de l'axe des réels vers $\overrightarrow{OM}$.

— Conjugué $\bar{z} = r e^{-i\theta}$: symétrique par rapport à l'axe des réels. Opposé $-z = r e^{i(\theta + \pi)}$: symétrique par rapport à O .

— **Rotation** de centre O et d'angle α : $z' = e^{i\alpha} z$. En particulier, multiplier par $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ fait tourner d'un quart de tour.

— Distance : $AB = |z_B - z_A|$.

— Valeurs : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 1 - Lire module et argument

Le module est la distance à O (le rayon du cercle), l'argument l'angle depuis l'axe des réels :

$$z = r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

— A : $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, donc $z_A = 2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \times \frac{1}{2} + 2i \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.

— B : $r = 3$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, donc $z_B = 3 e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

— C : sur l'axe des imaginaires **négatifs**, donc $\theta = -\frac{\pi}{2}$: $z_C = 2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2i$.

— **Contrôle** : B est dans le quadrant « réel négatif, imaginaire positif », ce que confirment les signes de sa forme algébrique.

Réponse. $z_A = 2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ · $z_B = 3 e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + i \frac{3\sqrt{2}}{2}$ · $z_C = 2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2i$.

Correction de l'exercice 2 - Trois points sur un même cercle

a) Avec $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$:

$$r e^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

— $z_1 = \sqrt{3} + i$;

— $z_2 = 2 \cos \frac{5\pi}{6} + 2i \sin \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + i$;

— $z_3 = \sqrt{3} - i$.

- b) $\overline{z_1} = \sqrt{3} - i = z_3 : M_3$ est le **symétrique** de M_1 par rapport à l'axe des réels. En forme exponentielle, on change le signe de l'argument.
- $-\overline{z_1} = -\sqrt{3} + i = z_2 : M_2$ est le symétrique de M_1 par rapport à l'axe des **imaginaires** ; son argument est $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.
- Les trois points ont le même module 2 : ils sont sur le même cercle.

Réponse. a) $\sqrt{3} + i$; $-\sqrt{3} + i$; $\sqrt{3} - i$ · b) symétries par rapport à l'axe des réels et à l'axe des imaginaires.

Correction de l'exercice 3 - Un argument non remarquable

Méthode : module, puis cosinus et sinus de l'argument, puis vérification du quadrant.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \cos \theta = \frac{a}{r} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

- a) $r = \sqrt{9 + 16} = 5$; $\cos \theta = 0,6$ et $\sin \theta = 0,8$.
- Aucun angle remarquable : la calculatrice donne $\theta \approx 0,93$ rad (premier quadrant, cohérent avec $a > 0, b > 0$). $z_1 \approx 5 e^{0,93i}$.
- b) $r = \sqrt{4 + 12} = 4$; $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$: $z_2 = 4 e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- c) $r = \sqrt{2}$; $\cos \theta = \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = -\frac{3\pi}{4}$: $z_3 = \sqrt{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.
- **Piège** : pour c), $\frac{b}{a} = 1$ comme pour $1 + i$, mais le point est dans le quadrant opposé. Un seul rapport ne suffit pas à trouver l'argument.

Réponse. a) $5e^{0,93i}$ environ · b) $4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ · c) $\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$.

Correction de l'exercice 4 - Retour à la forme algébrique

On développe avec la définition :

$$re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

- a) $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$: $4e^{i\frac{5\pi}{6}} = -2\sqrt{3} + 2i$.
- b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
- c) $\cos(2\pi) = 1$ et $\sin(2\pi) = 0$: $3e^{2i\pi} = 3$. Un tour complet ramène sur l'axe des réels positifs.
- d) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $10e^{i\frac{2\pi}{3}} = -5 + 5i\sqrt{3}$.
- **Contrôle** : dans chaque cas, $a^2 + b^2 = r^2$. Par exemple en a) : $12 + 4 = 16 = 4^2$.
- Réponse.** a) $-2\sqrt{3} + 2i$ · b) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ · c) 3 · d) $-5 + 5i\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 5 - Un module n'est jamais négatif

- a) Un argument est défini à 2π près : on retire ou on ajoute des tours complets.
- $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$, donc $e^{i\frac{7\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- $-\frac{9\pi}{4} = -2\pi - \frac{\pi}{4}$, donc $5e^{-i\frac{9\pi}{4}} = 5e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
- b) Un module est une **distance** : il est toujours positif. Le signe $-$ doit passer dans l'argument, avec $-1 = e^{i\pi}$:

$$-2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2 e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

— Module 2, argument $-\frac{2\pi}{3}$.

— Contrôle algébrique : $-2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$, dans le troisième quadrant, comme l'argument $-\frac{2\pi}{3}$.

Réponse. a) $e^{i\frac{\pi}{3}}$; $5e^{-i\frac{\pi}{4}}$ · b) $z = 2 e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Correction de l'exercice 6 - Multiplier par i, c'est tourner

a) $iz = i(3 + i) = 3i + i^2 = -1 + 3i$.

b) On écrit i sous forme exponentielle, puis on multiplie :

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{donc} \quad iz = r e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \text{ si } z = r e^{i\theta}$$

— Le module ne change pas : $OM' = OM = \sqrt{10}$ (vérification : $|-1 + 3i| = \sqrt{1 + 9}$).

— L'argument augmente de $\frac{\pi}{2}$: M' est l'image de M par la **rotation** de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens direct).

c) $i^2 z = -z = -3 - i$: deux quarts de tour font un demi-tour, M'' est le symétrique de M par rapport à O .

Réponse. a) $iz = -1 + 3i$ · b) même module $\sqrt{10}$, argument augmenté de $\frac{\pi}{2}$ · c) $-3 - i$.

Correction de l'exercice 7 - Construire un triangle équilatéral

a) Une rotation de centre O et d'angle α multiplie l'affixe par $e^{i\alpha}$:

$$z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$$

— Forme algébrique : $z_B = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

b) $z_B - z_A = -1 + i\sqrt{3}$, donc $AB = \sqrt{1 + 3} = 2$.

— $OA = |z_A| = 2$ et $OB = |z_B| = 2$.

— Les trois côtés mesurent 2 : OAB est **équilatéral**. C'était prévisible : $OA = OB$ (la rotation conserve les distances) et l'angle en O vaut $\frac{\pi}{3}$, soit 60° .

Réponse. a) $z_B = 2 e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ · b) $OA = OB = AB = 2$.

Correction de l'exercice 8 - Conjugué, opposé et symétries

a) On utilise $\overline{re^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$ et $-1 = e^{i\pi}$:

$$z = 2 e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \bar{z} = 2 e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad -z = 2 e^{-i\frac{3\pi}{4}} \quad -\bar{z} = 2 e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

b) En lisant l'angle de chaque point :

— $P = W_1$ (argument $\frac{\pi}{4}$) ; $Q = W_4$ ($-\frac{\pi}{4}$) ; $R = W_3$ ($-\frac{3\pi}{4}$) ; $S = W_2$ ($\frac{3\pi}{4}$).

c) Les quatre points sont à des angles espacés de $\frac{\pi}{2}$ sur un même cercle : $PSRQ$ est un **carré** de centre O .

— Côté : $PS = |-\bar{z} - z|$. Avec $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$: $-\bar{z} - z = -2\sqrt{2}$, donc $PS = 2\sqrt{2}$.

— Périmètre : $4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \approx 11,31$.

Réponse. b) $P = W_1$, $Q = W_4$, $R = W_3$, $S = W_2$ · c) carré de côté $2\sqrt{2}$, périmètre $8\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 9 - Résoudre une équation par identification

a) $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ et, par la règle des puissances, $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$.

b) Deux formes exponentielles sont égales si les modules sont égaux et les arguments égaux à 2π près :

$$r^2 e^{2i\theta} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow r^2 = 4 \text{ et } 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

— $r > 0$ donne $r = 2$; $\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

— Pour $k = 0$: $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

— Pour $k = 1$: $z = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

— Les autres valeurs de k redonnent les mêmes points. Vérification :

$$(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^2 = 2 + 4i - 2 = 4i.$$

Réponse. $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ ou $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 10 - Ensembles de points

On traduit module et argument en distance et en angle :

$$|z| = OM \quad \arg z = \text{angle de l'axe des réels vers } \overrightarrow{OM}$$

a) $OM = 3$: c'est le **cercle** de centre O et de rayon 3.

b) Tous les points dont la direction depuis O fait un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des réels : c'est la **demi-droite** d'origine O (exclue) passant par le point $1 + i$. Attention, la demi-droite opposée correspond à l'argument $-\frac{3\pi}{4}$ et n'en fait pas partie.

c) L'argument est fixé et la distance varie de 1 à 3 : c'est le **segment** de cette demi-droite compris entre le point $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le point $3e^{i\frac{\pi}{4}}$.

— **Moyen mnémotechnique** : fixer le module donne un cercle, fixer l'argument donne une demi-droite.

Réponse. a) cercle de centre O , rayon 3 · b) demi-droite d'origine O (exclue) dirigée par $1 + i$ · c) segment de cette demi-droite, entre les distances 1 et 3.

Correction de l'exercice 11 - Les trois solutions de $z^3 = 1$

a) $z^3 = r^3 e^{3i\theta}$ et $1 = 1e^{i0}$. Par identification :

$$r^3 = 1 \quad \text{et} \quad 3\theta = 0 + 2k\pi$$

— $r > 0$ réel, donc $r = 1$; et $\theta = \frac{2k\pi}{3}$.

b) $k = 0, 1, 2$ donnent trois points distincts ($k = 3$ redonne $k = 0$) :

$$— 1 ; e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Les trois points sont sur le cercle de rayon 1, régulièrement espacés de $\frac{2\pi}{3}$: le triangle est équilatéral.

— Côté entre 1 et $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$: $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \sqrt{3} \approx 1,73$.

— **Application** : ce sont les trois phases d'un réseau triphasé, décalées de 120° .

Réponse. b) $1 ; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ · c) côté $\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 12 - Les sommets d'un hexagone

a) On développe $2e^{i\theta} = 2\cos\theta + 2i\sin\theta$:

$$- a_0 = 2 ; a_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3} ; a_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3} ; a_3 = 2e^{i\pi} = -2.$$

b) Côté $A_0A_1 = |a_1 - a_0| = |-1 + i\sqrt{3}|$:

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

— Le côté est égal au rayon (les six triangles OA_kA_{k+1} sont équilatéraux) ; périmètre $6 \times 2 = 12$.

c) $a_{k+1} = 2e^{i\frac{(k+1)\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{k\pi}{3}}$: on multiplie par $e^{i\frac{\pi}{3}}$, rotation de 60° autour de O .

Réponse. a) $2 ; 1 + i\sqrt{3} ; -1 + i\sqrt{3} ; -2$ · b) côté 2, périmètre 12 · c) par $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Correction de l'exercice 13 - Distance entre deux points images

a) $z_A = 2i$ et $z_B = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$.

b) La distance est le module de la différence :

$$AB = |z_B - z_A| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{3 + 1} = 2$$

c) $OA = OB = AB = 2$: le triangle OAB est **équilatéral**.

— Avec les formes exponentielles seules : $OA = OB = 2$ (mêmes modules), et l'angle $\widehat{AOB}$ vaut $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ (différence des arguments).

— Un triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut 60° est équilatéral : on conclut sans aucun calcul de racine.

Réponse. a) $2i$ et $\sqrt{3} + i$ · b) $AB = 2$ · c) équilatéral.

Correction de l'exercice 14 - L'aiguille des minutes

a) $|z_0| = 12$ et le point est sur l'axe des imaginaires positifs : $z_0 = 12e^{i\frac{\pi}{2}}$.

b) En 60 minutes, l'aiguille fait un tour, soit 2π ; en 20 minutes, un tiers de tour : $\frac{2\pi}{3}$, dans le sens **indirect**, donc un angle de $-\frac{2\pi}{3}$.

$$z_{20} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z_0 = 12e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 12e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

— Forme algébrique : $12\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 6\sqrt{3} - 6i \approx 10,39 - 6i$.

— L'extrémité est à 10,39 cm à droite de l'axe et 6 cm en dessous : c'est bien la position du « 4 » sur le cadran.

c) À 12 h 45, trois quarts de tour : $12e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right)} = 12e^{-i\pi} = -12$, sur le « 9 ».

Réponse. a) $12e^{i\frac{\pi}{2}}$ · b) $-\frac{2\pi}{3}$; $z_{20} = 12e^{-i\frac{\pi}{6}} \approx 10,39 - 6i$ · c) -12 .

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un triangle rectangle isocèle

a) $|z_A| = \sqrt{3 + 1} = 2$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$: $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) La rotation multiplie par $e^{i\frac{\pi}{2}}$, la symétrie de centre O par $-1 = e^{i\pi}$:

$$z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3} \quad z_C = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$$

c) Avec $AB = |z_B - z_A|$:

- $z_B - z_A = (-1 - \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)$, donc
 $AB^2 = (1 + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} = 8$.
- $z_C - z_B = (1 - \sqrt{3}) - i(1 + \sqrt{3})$, donc $BC^2 = 8$ aussi.
- $AC = 2 \times OA = 4$, donc $AC^2 = 16$.
- $AB^2 + BC^2 = 16 = AC^2$ et $AB = BC = 2\sqrt{2}$: le triangle est **rectangle isocèle en B**.
C'était attendu : $[AC]$ est un diamètre du cercle de rayon 2 qui passe par B .

Réponse. a) $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ · b) $z_B = -1 + i\sqrt{3}$, $z_C = -\sqrt{3} - i$ · c) $AB = BC = 2\sqrt{2}$, $AC = 4$: rectangle isocèle en B .