

Plaquette 1 - Notation exponentielle, produits, quotients et impédances

Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- **Forme exponentielle** : tout complexe non nul s'écrit

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{avec } r = |z| > 0 \text{ et } \theta = \arg(z)$$

- Lien avec la forme trigonométrique : $r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.
- Passage de la forme algébrique : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$.
- **Produit et quotient** (l'intérêt principal de cette forme) :

$$r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta + \theta')} \quad \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$$

- **Puissance** : $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.
- **Conjugué et inverse** : $\overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}$ et $\frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$.
- Valeurs utiles : $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.
- En électricité : impédance $Z = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$; $|Z|$ est l'impédance en ohms, $\arg(Z)$ le **déphasage** entre tension et courant.

Correction de l'exercice 1 - De la forme algébrique à la forme exponentielle

On calcule le module puis l'argument.

a) $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donnent $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$$z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

b) $r = 3$; le point image est sur l'axe des imaginaires positifs, donc $\theta = \frac{\pi}{2}$: $z_2 = 3 e^{i\frac{\pi}{2}}$.

c) $r = 5$; le point est sur l'axe des réels négatifs, donc $\theta = \pi$: $z_3 = 5 e^{i\pi}$.

Réponse. a) $\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ · b) $3 e^{i\frac{\pi}{2}}$ · c) $5 e^{i\pi}$.

Correction de l'exercice 2 - De la forme exponentielle à la forme algébrique

On utilise $r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

a) $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $z = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2i\sqrt{3}$.

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, donc $z' = -2i$.

c) $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$, donc $z'' = -6$.

Réponse. a) $2 + 2i\sqrt{3}$ · b) $-2i$ · c) -6 .

Correction de l'exercice 3 - Produit sous forme exponentielle

a) Règle du cours : on **multiplie les modules** et on **additionne les arguments**.

— Modules : $3 \times 2 = 6$.

— Arguments : $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

$$zz' = 6 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

b) Comme $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, on obtient $zz' = 6i$.

— Intérêt de la méthode : le même calcul en forme algébrique demanderait de développer un produit et de simplifier des racines.

Réponse. a) $6e^{i\frac{\pi}{2}}$ · b) $6i$.

Correction de l'exercice 4 - Quotient sous forme exponentielle

Règle du cours : on **divise les modules** et on **soustrait les arguments**.

— Modules : $\frac{10}{5} = 2$.

— Arguments : $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{z}{z'} = 2 e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$$

— Contrôle : $z' \times 2i = 5 e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2 e^{i\frac{\pi}{2}} = 10 e^{i\frac{3\pi}{4}} = z$.

— Sur la figure, l'angle entre les vecteurs de z' et de z vaut bien $\frac{\pi}{2}$ (un angle droit), et z est deux fois plus loin de O que z' .

Réponse. $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$.

Correction de l'exercice 5 - Puissance d'un complexe

Règle du cours : $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

— Module : $(\sqrt{2})^4 = 4$.

— Argument : $4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$.

$$z^4 = 4 e^{i\pi} = -4$$

— Contrôle par la forme algébrique : $z = 1 + i$, et $(1 + i)^2 = 2i$, donc $(1 + i)^4 = (2i)^2 = -4$.
Même résultat.

Réponse. $z^4 = 4e^{i\pi} = -4$.

Correction de l'exercice 6 - Conjugué et inverse

Formules du cours.

— Conjugué : on change le signe de l'argument, le module reste : $\bar{z} = 5 e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

— Inverse : on inverse le module et on change le signe de l'argument :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{5} e^{-i\frac{\pi}{3}} = 0,2 e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

— Contrôle : $z \times \frac{1}{z} = \frac{5}{5} e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3})} = e^0 = 1$. Correct.

Réponse. $\bar{z} = 5e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $\frac{1}{z} = 0,2 e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Correction de l'exercice 7 - Module et argument d'un produit

On utilise les propriétés du module et de l'argument.

- $|z| = \sqrt{9 + 16} = 5$ et $|z'| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, donc $|zz'| = 5\sqrt{2} \approx 7,071$.
- $\arg(z) : \cos \theta = \frac{3}{5} = 0,6$, donc $\theta \approx 53,1^\circ$.
- $\arg(z') : \cos \theta' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \theta' < 0$, donc $\theta' = -45,0^\circ$.
- Argument du produit : $53,1 - 45,0 = 8,1^\circ$.
- Contrôle : $zz' = (3 + 4i)(1 - i) = 3 - 3i + 4i + 4 = 7 + i$, dont le module vaut $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ et l'argument $\arctan \frac{1}{7} \approx 8,1^\circ$. Cohérent.

Réponse. $|zz'| = 5\sqrt{2} \approx 7,071$ et $\arg(zz') \approx 8,1^\circ$.

Correction de l'exercice 8 - Impédance d'un circuit RL

- a) $L\omega = 0,15 \times 400 = 60 \, \Omega$, donc $Z = 40 + 60i$.
- b) $|Z| = \sqrt{40^2 + 60^2} = \sqrt{1\,600 + 3\,600} = \sqrt{5\,200} \approx 72,1 \, \Omega$.
— $\cos \theta = \frac{40}{72,1} \approx 0,555$ et $\sin \theta > 0$, donc $\theta = \arccos(0,555) \approx 56,3^\circ$.
- c) $Z \approx 72,1 e^{i \times 0,983}$ en radians, ou en degrés $Z \approx 72,1 e^{i \times 56,3^\circ}$.
— Interprétation : la tension est en **avance** de $56,3^\circ$ sur le courant, comportement inductif.

Réponse. a) $Z = 40 + 60i$ · b) $|Z| \approx 72,1 \, \Omega$, $\theta \approx 56,3^\circ$ · c) $Z \approx 72,1 e^{i0,983}$.

Correction de l'exercice 9 - Impédance d'un circuit RC

- a) $C\omega = 10^{-5} \times 1\,000 = 10^{-2}$, donc $\frac{1}{C\omega} = 100 \, \Omega$.
— Ainsi $Z = 100 - 100i$.
- b) $|Z| = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2} \approx 141,4 \, \Omega$.
— $\cos \theta = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta < 0$, donc $\theta = -45,0^\circ$.
— Interprétation : la tension est en **retard** de 45° sur le courant, comportement capacitif (argument négatif).
— Forme exponentielle : $Z = 100\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Réponse. a) $\frac{1}{C\omega} = 100 \, \Omega$ et $Z = 100 - 100i$ · b) $|Z| \approx 141,4 \, \Omega$, $\theta = -45,0^\circ$.

Correction de l'exercice 10 - Circuit RLC et résonance

- a) $L\omega = 0,2 \times 500 = 100 \, \Omega$.
— $C\omega = 2 \times 10^{-5} \times 500 = 10^{-2}$, donc $\frac{1}{C\omega} = 100 \, \Omega$.
— Partie imaginaire : $100 - 100 = 0$, donc $Z = 50 \, \Omega$: l'impédance est **réelle** pour cette pulsation.
- b) Z est réel lorsque $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, soit $LC\omega^2 = 1$ et donc

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,2 \times 2 \times 10^{-5}}} = \frac{1}{\sqrt{4 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{2 \times 10^{-3}} = 500 \text{ rad/s}$$

c) À la résonance, $Z = R = 50 \, \Omega$, donc $|Z| = 50 \, \Omega$: c'est la **valeur minimale** de l'impédance, et le déphasage est nul.

— Conséquence physique : à la résonance, le courant est maximal pour une tension donnée.

Réponse. a) $Z = 50 \, \Omega$ (réel) · b) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 500 \text{ rad/s}$ · c) $|Z| = 50 \, \Omega$ (minimum).

Correction de l'exercice 11 - Diviseur de tension complexe

a) $Z_1 + Z_2 = 100 - 100i$, de module $\sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2} \approx 141,4 \, \Omega$.

b) Propriété du module d'un quotient :

$$\left| \frac{U_s}{U_e} \right| = \frac{|Z_2|}{|Z_1 + Z_2|} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$$

c) La tension de sortie vaut environ 70,7 % de la tension d'entrée.

— C'est exactement la **fréquence de coupure** d'un filtre passe-bas du premier ordre : le gain y vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$, soit -3 dB .

Réponse. a) $100 - 100i$, module $100\sqrt{2}$ · b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ · c) c'est la coupure à -3 dB .

Correction de l'exercice 12 - Placer un produit

a) On multiplie les modules et on additionne les arguments :

$$z_1 z_2 = 2 \times 1 e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} = 2 e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

— C est sur le cercle de rayon 2, à l'angle $\frac{3\pi}{4}$ (135°) : dans le quadrant en haut à gauche.

— Forme algébrique : $z_1 z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

b) $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ a pour module 1 : multiplier par z_2 ne change pas la distance à O et ajoute $\frac{\pi}{2}$ à l'argument.

— C est l'image de A par la **rotation** de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Réponse. a) $z_1 z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ · b) rotation de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 13 - Lire une impédance dans le plan complexe

a) Le module est l'impédance en ohms :

$$|Z| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50 \, \Omega$$

— $\cos \theta = \frac{30}{50} = 0,6$ et $\sin \theta = \frac{40}{50} = 0,8$: $\theta \approx 0,93 \text{ rad}$ (environ 53°).

b) $\underline{Z} \approx 50 e^{0,93i}$.

— La partie imaginaire 40 est **positive** : c'est la réactance d'une bobine ($L\omega > 0$). Le dipôle est **inductif**, et le courant est en retard de $0,93 \text{ rad}$ sur la tension.

Réponse. a) $50 \, \Omega$, $\approx 0,93 \text{ rad}$ · b) $\approx 50 e^{0,93i}$, inductif.

Correction de l'exercice 14 - Un circuit RC sous forme exponentielle

a) $\underline{Z}_C = -50i = 50 e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (sur l'axe des imaginaires négatifs).

— $\underline{Z} = 50 - 50i$: module $\sqrt{50^2 + 50^2} = 50\sqrt{2}$, argument $-\frac{\pi}{4}$.

$$\underline{Z} = 50\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

b) On divise les modules et on soustrait les arguments :

$$\text{— } \underline{I} = \frac{10}{50\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{10} e^{i\frac{\pi}{4}} \approx 0,141 e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

— Le courant a une amplitude d'environ 0,141 A et il est **en avance** de $\frac{\pi}{4}$ sur la tension : c'est la signature d'un circuit capacitif.

Réponse. a) $\underline{Z}_C = 50e^{-i\frac{\pi}{2}}$; $\underline{Z} = 50\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ · b) $\underline{I} \approx 0,141 e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : calculs enchaînés

a) Produit : modules $2 \times 4 = 8$; arguments $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

$$zz' = 8 e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

— Quotient : modules $\frac{4}{2} = 2$; arguments $-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$, donc $\frac{z'}{z} = 2 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2i$.

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, donc

$$zz' = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 4\sqrt{3} - 4i$$

c) $z^3 = 2^3 e^{i \times 3 \times \frac{\pi}{6}} = 8 e^{i\frac{\pi}{2}} = 8i$.

— Contrôle : $|z^3| = |z|^3 = 8$, ce qui correspond bien au module de $8i$.

Réponse. a) $zz' = 8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\frac{z'}{z} = -2i$ · b) $4\sqrt{3} - 4i$ · c) $8i$.