

Plaquette 4 - Signaux sinusoïdaux et amplitudes complexes

Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Représentation complexe d'un signal sinusoïdal (pulsation ω fixée).

— Au signal $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$, avec $U > 0$, on associe l'**amplitude complexe**

$$\underline{U} = U e^{i\varphi} \quad \text{et} \quad u(t) = \operatorname{Re}(\underline{U} e^{i\omega t})$$

— Module = amplitude ; argument = phase à l'origine. Un sinus se ramène à un cosinus : $\sin(\omega t + \varphi) = \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$.

— **Diagramme de Fresnel** : le vecteur d'affixe $\underline{U}$; l'angle entre deux vecteurs est le **déphasage** entre les signaux.

— **Somme** de deux signaux de même pulsation : amplitude complexe $\underline{U}_1 + \underline{U}_2$ (on additionne les vecteurs).

— **Dérivée** : amplitude complexe $i\omega \underline{U}$ (amplitude multipliée par ω , phase avancée de $\frac{\pi}{2}$). **Primitive** : $\frac{\underline{U}}{i\omega}$.

— Lois de l'électricité : $\underline{U}_R = R \underline{I}$, $\underline{U}_L = iL\omega \underline{I}$, $\underline{U}_C = \frac{\underline{I}}{iC\omega}$.

— Déphasage $\Delta\varphi$ et décalage temporel Δt : $\Delta\varphi = \omega \Delta t$.

— Puissance moyenne reçue : $P = \frac{1}{2} UI \cos \varphi$, où φ est le déphasage de u sur i (U, I amplitudes).

Correction de l'exercice 1 - Du signal à l'amplitude complexe

On lit l'amplitude (module) et la phase à l'origine (argument) :

$$U \cos(\omega t + \varphi) \mapsto \underline{U} = U e^{i\varphi}$$

a) $\underline{U} = 5 e^{i\frac{\pi}{3}}$: le vecteur de longueur 5 incliné de 60° , c'est $\vec{V}_2$.

b) $\underline{I} = 2 e^{-i\frac{\pi}{4}}$: longueur 2, sous l'axe des réels, c'est $\vec{V}_3$.

c) On ramène le sinus à un cosinus : $3 \sin(\omega t) = 3 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$.

— $\underline{V} = 3 e^{-i\frac{\pi}{2}} = -3i$: le vecteur vertical dirigé vers le bas, c'est $\vec{V}_1$.

— **Piège** : prendre $\underline{V} = 3$ reviendrait à confondre sinus et cosinus, c'est-à-dire à décaler le signal d'un quart de période.

Réponse. a) $5e^{i\frac{\pi}{3}} (\vec{V}_2)$ · b) $2e^{-i\frac{\pi}{4}} (\vec{V}_3)$ · c) $3e^{-i\frac{\pi}{2}} (\vec{V}_1)$.

Correction de l'exercice 2 - De l'amplitude complexe au signal

a) $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\pi \text{ rad/s}$.

b) On lit $U = 4$ et $\varphi = -\frac{\pi}{6}$:

$$u(t) = \operatorname{Re}(\underline{U} e^{i\omega t}) = 4 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$

c) $u(0) = 4 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ V}$.

- u est maximale quand $100\pi t - \frac{\pi}{6} = 0$, soit $t = \frac{1}{600}$ s $\approx 1,67$ ms.
- Une phase négative signifie un **retard** : le maximum arrive après $t = 0$.

Réponse. a) 100π rad/s · b) $u(t) = 4 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ · c) $2\sqrt{3} \approx 3,46$ V ; $t = \frac{1}{600}$ s.

Correction de l'exercice 3 - Lire un diagramme de Fresnel

- a) $\underline{U}_1 = 3$: amplitude 3 V, phase 0. $\underline{U}_2 = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$: amplitude 2 V, phase $\frac{\pi}{2}$.
- $u_1(t) = 3 \cos(200t)$ et $u_2(t) = 2 \cos\left(200t + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \sin(200t)$.
- b) Le déphasage est l'angle entre les vecteurs : $\frac{\pi}{2}$. On dit que les tensions sont **en quadrature**.
- u_2 a la plus grande phase : elle est **en avance** de $\frac{\pi}{2}$ sur u_1 .
- c) Avec $\Delta\varphi = \omega \Delta t$:

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi/2}{200} \approx 7,85 \text{ ms}$$

- C'est un quart de la période $T = \frac{2\pi}{200} \approx 31,4$ ms.

Réponse. a) $u_1 = 3 \cos(200t)$, $u_2 = 2 \cos\left(200t + \frac{\pi}{2}\right)$ · b) $\frac{\pi}{2}$, u_2 en avance · c) $\approx 7,85$ ms.

Correction de l'exercice 4 - Additionner deux signaux

a) $\underline{U}_1 = 3$ et $\underline{U}_2 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i$, donc $\underline{U} = 3 + 4i$.

b) On passe sous forme exponentielle :

$$|\underline{U}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \cos \varphi = \frac{3}{5}, \sin \varphi = \frac{4}{5}$$

- $\varphi \approx 0,93$ rad (premier quadrant).
- $u(t) = 5 \cos(\omega t + 0,93)$.

c) Non : $5 \neq 3 + 4 = 7$. Les signaux, déphasés, n'atteignent **pas** leur maximum au même instant.

- On additionne des vecteurs, pas des longueurs : le triangle de côtés 3, 4 et 5 est rectangle, car les signaux sont en quadrature.

Réponse. a) $\underline{U} = 3 + 4i$ · b) $u(t) = 5 \cos(\omega t + 0,93)$ · c) non, $5 < 7$.

Correction de l'exercice 5 - Une somme qui garde l'amplitude

On additionne les amplitudes complexes :

$$\underline{S} = 2 + 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

- $2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$.
- $\underline{S} = 1 + i\sqrt{3}$.

Forme exponentielle : $|\underline{S}| = \sqrt{1+3} = 2$, et $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

- $s(t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$.

- **Interprétation** : les deux vecteurs de longueur 2 font un angle de 120° ; leur somme a encore pour longueur 2 et pointe exactement entre eux, à 60° .

Réponse. $s(t) = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 6 - Le triphasé

a) $\underline{U}_1 = U$ (vecteur $\vec{b}$), $\underline{U}_2 = U e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ (vecteur $\vec{d}$, sous l'axe) et $\underline{U}_3 = U e^{-i\frac{4\pi}{3}} = U e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (vecteur $\vec{c}$).

b) Avec $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

— $e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$1 + e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

c) L'amplitude complexe de la somme est nulle, donc $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ à tout instant.

- Géométriquement, les trois vecteurs forment une étoile équilibrée. En pratique, quand les trois phases sont également chargées, le fil de **neutre** ne transporte aucun courant : on économise du cuivre.

Réponse. b) 0 · c) $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ à tout instant.

Correction de l'exercice 7 - Dériver, c'est multiplier par $i\omega$

a) $u'(t) = -U\omega \sin(\omega t + \varphi)$. Or $-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, donc

$$u'(t) = U\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

b) L'amplitude complexe de u' est donc $U\omega e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} = \omega e^{i\frac{\pi}{2}} \times U e^{i\varphi} = i\omega \underline{U}$.

- Amplitude multipliée par ω , phase avancée d'un quart de tour : c'est la multiplication par $i\omega$.

c) $\underline{U} = 10$, donc l'amplitude complexe de u' est $100i \times 10 = 1\,000i = 1\,000 e^{i\frac{\pi}{2}}$.

— $u'(t) = 1\,000 \cos\left(100t + \frac{\pi}{2}\right) = -1\,000 \sin(100t)$, ce que confirme la dérivation directe.

- **Intérêt** : une équation différentielle devient une équation **algébrique** entre complexes.

Réponse. a) $U\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ · c) $1\,000i$; $u'(t) = -1\,000 \sin(100t)$.

Correction de l'exercice 8 - Primitiver, c'est diviser par $i\omega$

a) D'après la règle de dérivation, l'amplitude complexe de q' est $i\omega \underline{Q}$. Comme $q' = i$:

$$i\omega \underline{Q} = \underline{I} \Leftrightarrow \underline{Q} = \frac{\underline{I}}{i\omega}$$

— $\underline{I} = 2$ et $\omega = 50$: $\underline{Q} = \frac{2}{50i} = \frac{2 \times (-i)}{50} = -0,04i = 0,04 e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

b) $q(t) = 0,04 \cos\left(50t - \frac{\pi}{2}\right) = 0,04 \sin(50t)$ (en C).

— Vérification : $q'(t) = 0,04 \times 50 \cos(50t) = 2 \cos(50t) = i(t)$.

— **Rappel** : $\frac{1}{i} = -i$, car $i \times (-i) = 1$. Diviser par i retarde la phase d'un quart de tour.

Réponse. a) $\underline{Q} = -0,04 i$ · b) $q(t) = 0,04 \sin(50t)$.

Correction de l'exercice 9 - Lire un déphasage sur des courbes

a) M est en $t = 0$, N en $t = \frac{\pi}{3}$: le décalage vaut $\Delta t = \frac{\pi}{3}$ s.

— Le courant atteint son maximum **après** la tension : i est **en retard** sur u .

b) Avec $\Delta\varphi = \omega \Delta t$ et $\omega = 1$:

$$\Delta\varphi = 1 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

— $\underline{U} = 2$ et $\underline{I} = 1,5 e^{-i\frac{\pi}{3}}$: le retard se traduit par un argument **négatif**.

— Ce retard du courant sur la tension est la signature d'un circuit **inductif** (bobine).

Réponse. a) $\Delta t = \frac{\pi}{3}$ s, i en retard · b) $\underline{U} = 2$, $\underline{I} = 1,5 e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Correction de l'exercice 10 - Loi des mailles avec une bobine

a) $\underline{U}_R = 10 \times 1 = 10$ et $\underline{U}_L = 10 i$.

— La tension aux bornes de la bobine est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant, celle de la résistance est en phase.

b) $\underline{U} = 10 + 10 i$:

$$|\underline{U}| = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2} \quad \arg \underline{U} = \frac{\pi}{4}$$

— $\underline{U} = 10\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

c) Amplitude : $10\sqrt{2} \approx 14,14$ V, et non $10 + 10 = 20$ V.

— La tension est en avance de $\frac{\pi}{4}$ (45°) sur le courant. On mesurerait 10 V aux bornes de chaque composant et seulement 14,14 V aux bornes de l'ensemble : en alternatif, les tensions s'ajoutent comme des vecteurs.

Réponse. a) 10 et $10 i$ · b) $10\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ · c) $\approx 14,14$ V, avance de $\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 11 - Tension aux bornes d'un condensateur

a) $\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi$, donc $C\omega = 10^{-4} \times 100\pi = 0,01\pi$ et $\frac{1}{C\omega} \approx 31,83 \Omega$.

b) Avec $\frac{1}{i} = -i$:

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{I}}{iC\omega} = -i \times 31,83 \times 0,5 \approx -15,92 i$$

— Forme exponentielle : $\underline{U}_C \approx 15,92 e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

c) $u_C(t) \approx 15,92 \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = 15,92 \sin(100\pi t)$.

— La tension est **en retard** de $\frac{\pi}{2}$ sur le courant : c'est l'inverse de la bobine.

— **Moyen de retenir** : bobine, $iL\omega$, avance ; condensateur, $\frac{1}{iC\omega}$, retard.

Réponse. a) $\approx 31,83 \Omega$ · b) $\approx -15,92 i = 15,92 e^{-i\frac{\pi}{2}}$ · c) retard de $\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 12 - Puissance moyenne et déphasage

a) $\underline{U} = 325$ et $\underline{I} = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}$ (retard, donc argument négatif).

b) Le déphasage de u sur i vaut $\varphi = \frac{\pi}{6}$:

$$P = \frac{1}{2} UI \cos \varphi = \frac{1}{2} \times 325 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{6}$$

— $P = 325 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 281,5 \text{ W}$.

— Le facteur $\cos \varphi \approx 0,866$ s'appelle le **facteur de puissance**.

c) En quadrature, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $\cos \varphi = 0$: $P = 0 \text{ W}$.

— Le courant circule mais **aucune énergie n'est consommée en moyenne** : c'est le cas d'une bobine ou d'un condensateur parfaits. Le fournisseur d'électricité facture pourtant l'échauffement des câbles, d'où l'intérêt d'un facteur de puissance proche de 1.

Réponse. a) $\underline{U} = 325$, $\underline{I} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ · b) $\approx 281,5 \text{ W}$ · c) 0 W .

Correction de l'exercice 13 - Retrouver amplitude et phase

a) $u(0) = A \cos \varphi = 3$.

— $u'(t) = -100A \sin(100t + \varphi)$, donc $u'(0) = -100A \sin \varphi = -400$, soit $A \sin \varphi = 4$.

b) Ces deux nombres sont exactement la partie réelle et la partie imaginaire de l'amplitude complexe :

$$\underline{U} = A e^{i\varphi} = A \cos \varphi + i A \sin \varphi = 3 + 4i$$

— $A = |3 + 4i| = 5 \text{ V}$.

— $\cos \varphi = 0,6$ et $\sin \varphi = 0,8$: $\varphi \approx 0,93 \text{ rad}$.

— $u(t) = 5 \cos(100t + 0,93)$.

— **Intérêt** : deux mesures à l'instant 0 (valeur et vitesse de variation) suffisent à connaître tout le signal.

Réponse. b) $\underline{U} = 3 + 4i$; $A = 5 \text{ V}$, $\varphi \approx 0,93 \text{ rad}$.

Correction de l'exercice 14 - Interférences constructives et destructives

a) $\underline{S} = 3 + 3e^{i\varphi}$. On factorise par $3e^{i\frac{\varphi}{2}}$:

— $\underline{S} = 3e^{i\frac{\varphi}{2}}(e^{-i\frac{\varphi}{2}} + e^{i\frac{\varphi}{2}})$.

— Par la formule d'Euler, la parenthèse vaut $2 \cos \frac{\varphi}{2}$, un réel. Comme $|e^{i\frac{\varphi}{2}}| = 1$:

$$|\underline{S}| = 6 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|$$

b) $\varphi = 0$: 6 ; $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 4,24$; $\varphi = \frac{2\pi}{3}$: $6 \times \frac{1}{2} = 3$; $\varphi = \pi$: 0.

c) Pour $\varphi = \pi$, les deux signaux sont en **opposition de phase** et s'annulent exactement.

— Un casque anti-bruit capte le bruit ambiant et émet le même signal déphasé de π : les deux sons interfèrent de façon destructive dans l'oreille.

Réponse. a) $6 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|$ · b) 6 ; $\approx 4,24$; 3 ; 0 · c) signal en opposition de phase.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un circuit RL alimenté

a) $|\underline{Z}| = \sqrt{36 + 64} = 10 \Omega$; $\cos \theta = 0,6$, $\sin \theta = 0,8$ donc $\theta \approx 0,93 \text{ rad}$: $\underline{Z} \approx 10 e^{0,93i}$.

b) On divise les formes exponentielles :

$$\underline{I} = \frac{12}{10 e^{0,93i}} = 1,2 e^{-0,93i}$$

— $i(t) = 1,2 \cos(1\,000t - 0,93)$: amplitude 1,2 A, en retard de 0,93 rad sur la tension.

c) $\underline{U}_R = 6\underline{I}$, d'amplitude 7,2 V ; $\underline{U}_L = 8i\underline{I}$, d'amplitude 9,6 V.

— $7,2 + 9,6 = 16,8 \neq 12$: les amplitudes ne s'additionnent pas.

— Les amplitudes complexes, si : $\underline{U}_R + \underline{U}_L = (6 + 8i)\underline{I} = \underline{Z}\underline{I} = \underline{U} = 12$.

— Et en effet $7,2^2 + 9,6^2 = 51,84 + 92,16 = 144 = 12^2$: les deux vecteurs de Fresnel sont perpendiculaires.

Réponse. a) $10 e^{0,93i}$ · b) $i(t) = 1,2 \cos(1\,000t - 0,93)$ · c) 7,2 V et 9,6 V ; somme $16,8 \neq 12$, mais $\underline{U}_R + \underline{U}_L = 12$.